Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)
Sei $u \in C^{2;1}(B_R(0) \times [0,T))$, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } B_R(0) \times (0,T), \\ u = 0 & \text{auf } \mathcal{P}(B_R(0) \times (0,T)) \setminus B_R(0) \times \{0\} \end{cases}$$

Beweise oder widerlege: Es gibt eine von R unabhängige Konstante $\lambda > 0$, so dass

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(B_R(0))} \le e^{-\lambda t} \cdot ||u(\cdot,0)||_{L^2(B_R(0))}$$

für alle solche Lösungen gilt.
Hinweis: Ohne Kenntnisse aus den Partiellen Differentialgleichungen Ia genügt es, den Fall $n = 1$ zu betrachten.

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)
Seien $u_1, u_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ subharmonisch, (C^2-, C^0-subharmonisch oder im Viskositätssinne).
Zeige, dass es glatte subharmonische Funktionen

$$w_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ mit } w_k \longrightarrow \max\{u_1, u_2\} \text{ in } C^0_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

gibt.
Hinweis: Approximiere den Glättungskern durch eine Linearkombination von Diracmaßen.

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei $\partial\Omega$ Lipschitz.
Zeige, dass intrinsischer und extrinsischer Abstand vergleichbar sind: Zu $x, y \in \Omega$ gibt es einen C^1-Weg $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und $L(\gamma) = \int\limits_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\, dt \le c(\Omega) \cdot |x - y|$.

Aufgabe 1.4. (4 Punkte)
Sei $R > 0$. Sei $0 \ne x \in \mathbb{R}^n$. Definiere $x^*(x) := \frac{R^2}{|x|^2} x$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ offen. Definiere $\Omega^* := \{x^*(x) : x \in \Omega\}$.

Zu $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ durch

$$u^*(x^*) := \frac{|x|^{n-2}}{R^{2n-4}} u(x) = \frac{1}{|x^*|^{n-2}} u\left(\frac{R^2}{|x^*|^2} x^*\right).$$

Zeige: u ist genau dann in Ω harmonisch, wenn dies für u^* in Ω^* gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch, 30.10.2013, 15:15 Uhr, in der Vorlesung.