Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (6 Punkte)
Sei $\Gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -|x|^{2-n}, & n \geq 2, \\ \log|x|, & n = 2, \end{cases}$$

definiert. Seien $f, g \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ mit $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ und $0 < \alpha < 1$.
Untersuche die folgenden Funktionen auf absolute Integrierbarkeit nahe $x = 0$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \ , & \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma \ , & \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\Gamma \ , \\ f \cdot \Gamma \ , & f \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma \ , & f \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\Gamma \ , \\ g \cdot \Gamma \ , & g \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma \ , & g \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\Gamma \ . \end{array}$$

Aufgabe 2.2. (2 Punkte)
Führe die Details zu $\Delta w = f$ im Beweis von Theorem 1.8 aus.

Aufgabe 2.3. (4 Punkte)
Ergänze die Details am Ende des Beweises des Theorems von Gauß.

Aufgabe 2.4. (Dimensionsunabhängige Normen) (4 Punkte)

(i) Präzisiere die Aussage, dass sich die dimensionsunabhängigen Normen $\|\cdot\|'_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ unter Homothetien des Gebietes nicht ändern und beweise sie.

(ii) Sei $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $v \in C^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Dann ist $u \cdot v \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ und es gilt
$$\|u \cdot v\|'_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leq \|u\|'_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \|v\|'_{C^{0,\beta}(\Omega)}.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, 06.11.2013, 15:15 Uhr, in der Vorlesung.