Oliver Schnürer, Matthias Makowski
Universität Konstanz
Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$, $k \ge 1$, $0 < \alpha < 1$.
Fixiere $\eta_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta_i \ge 0$, $1 \le i \le N$, so dass $\sum\limits_{i=1}^N \eta_i = 1$ auf $\partial\Omega$ gilt.
Seien $\Phi_i : U_i \to V_i$ auf einer Umgebung U_i von $\operatorname{supp} \eta_i$ definierte $C^{k,\alpha}$-Diffeomorphismen mit $\Phi_i(\partial\Omega \cap \operatorname{supp} \eta_i) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
Definiere

$$C^{k,\alpha}(\partial\Omega) := \left\{ u \in C^0(\partial\Omega) : (u \cdot \eta_i) \circ \Phi_i^{-1} \in C^{k,\alpha}\left(V_i \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right)\right) \text{ für } 1 \le i \le N \right\}$$

mit $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)} := \sum\limits_{i=1}^N \left\|(u \cdot \eta_i) \circ \Phi_i^{-1}\right\|_{C^{k,\alpha}(V_i \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))}$.
Zeige, dass $\left(C^{k,\alpha}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)}\right)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 5.2. (5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$, $k \ge 1$, $0 < \alpha < 1$. Sei $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\Omega \Subset \Omega' \Subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen stetigen linearen Fortsetzungsoperator

$$E : C^{k,\alpha}(\partial\Omega) \to C_c^{k,\alpha}(\Omega')$$

Hinweis: Benutze eine Zerlegung der Eins und Aufbiegetransformationen und setze in der aufgebogenen Situation konstant in e_n-Richtung fort.

Aufgabe 5.3. (6 Punkte)
Führe die Details zu Bemerkung 2.6 aus.

Abgabe:
Bis Montag, 25.11.2013, 13:30 Uhr, in der Vorlesung oder am darauffolgenden Tag in den Übungsgruppen.