Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (6 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$, $k \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$. Auf $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ definieren wir eine Norm durch

$$\|u\|^E_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)} := \inf\left\{\|w\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} : w \in C^{k,\alpha}_c(\mathbb{R}^n) \text{ mit } w = u \text{ auf } \partial\Omega\right\}.$$

Zeige, dass $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)}$ wie in Aufgabe 5.1 und $\|\cdot\|^E_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)}$ äquivalente Normen auf $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ sind.
Bemerkung: Dies zeigt auch, dass Normen $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)}$ für unterschiedliche Wahlen von η_i, Φ_i äquivalent sind.

Aufgabe 6.2. (5 Punkte)
Führe die Details zu den Transformationen im Beweis von Theorem 2.5 aus:

(i) Sei $\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und ψ seine Inverse. Gelte

$$a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du = f \text{ in } \Omega.$$

Leite für $\tilde{u}(y) := u(\psi(y))$ eine Differentialgleichung der Form

$$\tilde{a}^{ij}\tilde{u}_{ij} + \tilde{b}^i\tilde{u}_i + \tilde{d}\tilde{u} = \tilde{f} \text{ in } \tilde{\Omega}$$

her. Gib $\tilde{a}^{ij}$, $\tilde{b}^i$, $\tilde{d}$ und $\tilde{f}$ an und überprüfe auf Elliptizität.

(ii) Konstruiere einen solchen Diffeomorphismus φ, so dass für ein $x_0 \in \Omega$

$$\tilde{a}^{ij}(\varphi(x_0)) = \delta^{ij}$$

gilt.

Aufgabe 6.3. (5 Punkte)

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Sei η ein positiver symmetrischer Friedrichscher Glättungskern. Definiere $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon$. Sei $\Omega' \Subset \Omega$.
Dann gelten

$$u_\varepsilon \to u \text{ in } C^{k,\beta}(\Omega')$$

für alle $0 < \beta < \alpha$ und

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq c \cdot \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}.$$

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$, $k \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Dann gibt es für $l \in \mathbb{N}$ glatte, offene und beschränkte Mengen Ω_l mit $\Omega \subset \Omega_l$, so dass die Ränder $\partial\Omega_l$ lokal als Graphen darstellenden Funktionen ω_l lokal in $C^{k,\alpha}$ beschränkt sind und lokal in $C^{k,\beta}$, $0 < \beta < \alpha$, gegen ω, die $\partial\Omega$ lokal als Graphen darstellende Funktion, konvergieren.
Hinweis: Benutze eine lokale Graphendarstellung.

Abgabe:
Bis Montag, 02.12.2013, 13:30 Uhr, in der Vorlesung oder am darauffolgenden Tag in den Übungsgruppen.