Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Es gelten die Generalvoraussetzungen der Schaudertheorie aus der Vorlesung.
Sei $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ die *einzige* Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Aufgrund des Beweises von Theorem 2.5 gilt dann auch ohne eine Vorzeichenbedingung an d

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right\}.$$

Zeige, dass aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung sogar

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} \right\}$$

gilt.
Hinweis: Passe Bemerkung 1.10 aus der Vorlesung Partielle Differentialgleichungen Ia an.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)
Angenommen, Lemma 3.2 gilt für $R = 1$ und $T = 1$.
Zeige damit Lemma 3.2 für beliebige $R > 0$ und $T > 0$.
Hinweis: Skaliere.

Aufgabe 7.3. (4 Punkte)
Angenommen, Theorem 3.6 gilt im Spezielfall

$$R = 1,\ k = 0 \quad \text{und} \sup_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} u^+ \le 0.$$

Zeige damit die allgemeine Variante des Theorems.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Dann gilt

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^p(\Omega)} \le c(n,p) \cdot \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}$$

Sei $Lw = a^{ij}w_{ij}$ für ein x-unabhängiges a^{ij} mit $a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Bestimme damit c_1, so dass

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^p(\Omega)} \le c_1 \cdot \|Lu\|_{L^p(\Omega)}$$

gilt. Wie hängt c_1 von a^{ij} und λ ab?
Hinweis: Transformiere L auf den Laplaceoperator und benutze, dass $c(n,p)$ nicht von Ω abhängt.

Abgabe:
Bis Montag, 09.12.2013, 13:30 Uhr, in der Vorlesung oder am darauffolgenden Tag in den Übungsgruppen.