Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2013/2014
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 11

Aufgabe 11.1. (4 Punkte)
Arbeite die Details zur Mittelwerteigenschaft von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung aus.
Quelle: Kapitel 2.3, L. Evans: Partial Differential Equations.
Die dort auftretenden "heat balls" sind kompakt. Wieso steht diese Mittelwerteigenschaft trotzdem nicht im Widerspruch zur unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit?

Aufgabe 11.2. (4 Punkte)
Formuliere und beweise mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung eine einfache Variante von Theorem 3.8.

Aufgabe 11.3. (3 Punkte)
Gib einen einfacheren Beweis von Lemma 3.14 für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Benutze zum Beispiel die Darstellungsformel für Lösungen.

Aufgabe 11.4. (3 Punkte)
Seien $a^{ij}, b^i \in L^\infty$. Sei a^{ij} gleichmäßig elliptisch. Dann hat die Gleichung

$$-\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i = 0$$

unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Formuliere eine entsprechende präzise Aussage und beweise diese.

Aufgabe 11.5. (2 Punkte)
Seien $m \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
Finde eine C^2-Funktion $\rho = \rho_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) ρ ist stückweise polynominal,
(ii) $\rho(t) = t$ für $z \le m - \varepsilon$,
(iii) $\rho(t) = m - \frac{\varepsilon}{2}$ für $m \le z$,
(iv) $0 \le \rho' \le 1$,
(v) $\rho'' \le 0$.

Abgabe:
Bis Montag, 20.01.2014, 13:30 Uhr, in der Vorlesung oder am darauffolgenden Tag in den Übungsgruppen.