Seminar/Vorlesung: Riccifluss vor G. Perelman
(Ricci flow before G. Perelman)

Dozent: Matthias Makowski

2 SWS

Art der Veranstaltung: Eine Mischung aus Seminar und Vorlesung, je nachdem, ob die Teilnehmer es wünschen, selbst vorzutragen oder nicht.

Vorkenntnisse: Differentialgeometrie und ein Existenzsatz über parabolische Differentialgleichungen, der aber auch geglaubt werden kann.

Ort/Termine: M 631, Di 16-18

Zielgruppe: An einer Vertiefung oder Abschlussarbeit in Differentialgeometrie bzw. Geometrischer Analysis Interessierte.

Inhalt: Der Riccifluss

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$$

ist ein quasilineares System degeneriert parabolischer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Er deformiert die Metrik g_{ij} in Richtung des Riccitensors R_{ij} und ändert damit Abstände und Krümmungen von M.

Aufbauend auf Arbeiten insbesondere von R. Hamilton [2] hat G. Perelman [3, 4, 5] mit Hilfe des Ricciflusses eine Vermutung von Poincaré (und mehr) bewiesen: Eine geschlossene, dreidimensionale, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist homöomorph (und diffeomorph) zu $\mathbb{S}^3$.

Da dieser Beweis komplizierter ist, behandeln wir zunächst nur Grundlagen. Die folgenden Themen werden noch unterteilt.

- Kurzzeitexistenz und DeTurck Trick [1].
  Durch Zusatzterme wird die Flussgleichung strikt parabolisch: Ricci-DeTurck Fluss. Unter Verwendung von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen kann man aus Lösungen des Ricci-DeTurck Flusses Lösungen des Ricciflusses bekommen.
- Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten mit positiver Riccikrümmung [2].
  Eine geschlossene, einfach zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit positiver Riccikrümmung ist diffeomorph zu $\mathbb{S}^3$. Im Beweis wird das Maximumprinzip auf geeignet gewählte Testgrößen angewandt, die implizieren, dass die Mannigfaltigkeit immer „runder“ wird.
- Riccifluss auf vollständigen nichtkompakten Mannigfaltigkeiten [6].
  Mit Hilfe von inneren a priori Abschätzungen bekommt man einen Existenzsatz für den Riccifluss auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten.

Literatur

1. Dennis M. DeTurck, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 1, 157–162.
2. Richard S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306.
3. Grisha Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, `arXiv:math.DG/0211159`.
4. Grisha Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, `arXiv:math.DG/0303109`.
5. Grisha Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, `arXiv:math.DG/0307245`.
6. Wan-Xiong Shi, *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **30** (1989), no. 1, 223–301.