Matthias Makowski, Marcello Sani — Universität Konstanz — Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Vorlesung Topologie

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)

(i) Sei $X \subset \mathbb{R}$. Definiere $d : X \times X$ durch $d(x,y) := |x-y|$. Zeige, dass (X,d) ein metrischer Raum ist.

(ii) Sei nun speziell $X = [0,3)$. Welche der folgenden Mengen sind in (X,d) offen, welche sind abgeschlossen?

	$[0,1)$	$[0,1]$	$[2,3)$	$(2,3)$	$[1,2)$	$[0,3)$	$(1,2)$	$[1,2]$
offen								
abgeschlossen								

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)
Sei (X,d) ein metrischer Raum. Definiere auf $X \times X$ die Funktionen

(i) $d_1(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$,

(ii) $d_2(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}$.

Zeige, dass dies ebenfalls Metriken auf X sind. Untersuche, ob beziehungsweise welche der Metriken d_1, d_2 topologisch äquivalent zu d ist.

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)
Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) f ist stetig.

(ii) $\underset{x\in X}{\forall} \; \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} : a \in B_\delta(x) \Longrightarrow f(a) \in B_\varepsilon(f(x))$.

(iii) $f^{-1}(B)$ ist offen für alle offenen Mengen $B \subset Y$.

Aufgabe 1.4. (4 Punkte)
Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Überprüfe bei den folgenden Aussagen, welche äquivalent zur Stetigkeit von f ist (mit Beweis beziehungsweise Angabe eines Gegenbeispiels):

(i) $f(A)$ ist offen für alle offenen Mengen $A \subset X$.

(ii) $f^{-1}(B)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen $B \subset Y$.

(iii) $f(A)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$.

(iv) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ auch $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt.

Abgabe: Bis Mittwoch, 02.11.2012, 13.00 Uhr in F402