Matthias Makowski, Marcello Sani — Universität Konstanz — Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Vorlesung Topologie

Blatt 3

Aufgabe 3.1. (4 Punkte)

(i) Sei X eine Menge und seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien auf X. Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen der Topologie $\mathcal{O}_1$ bzw. $\mathcal{O}_2$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (1) $\mathcal{O}_2$ ist feiner als $\mathcal{O}_1$.
  (2) Für alle $x \in X$ und alle $B_1 \in \mathcal{B}_1$ mit $x \in B_1$ gibt es ein $B_2 \in \mathcal{B}_2$ mit $x \in B_2 \subset B_1$.

(ii) Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ die Systeme von Mengen aus Beispiel 2.12 aus der Vorlesung und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ die in dem Beispiel genannten Topologien auf $\mathbb{R}$. Überprüfe für jedes $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3$, ob es eine Basis der Topologie $\mathcal{O}_i$ auf $\mathbb{R}$ ist. Überprüfe weiterhin für jede dieser Topologien, welche der anderen beiden sie enthält.

Aufgabe 3.2. (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. Die charakteristische Funktion $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ von A ist definiert durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ sei mit der natürlichen Topologie versehen. Zeige, dass χ_A genau in $X \setminus (\partial A)$ stetig ist.

Aufgabe 3.3. (4 Punkte)
Seien X und Y topologische Räume. Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn für alle $A \subset X$ die Beziehung

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

gilt.

Kleiner Zusatz: Gilt für stetige Funktionen stets $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$?

Aufgabe 3.4. (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum, $a \in X$ und seien f, $g : X \to \mathbb{R}$ zwei in a stetige Funktionen mit $f(a) = g(a)$. $\mathbb{R}$ trage die Standardtopologie. Zeige:

(i) Ist $h : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die in einer Umgebung $U \in \mathcal{U}(a)$ die Ungleichungen

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in U$$

gelten, dann ist h ebenfalls in a stetig.

(ii) Die Funktion h mit $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \sin \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ für $x \neq 0$ und $0 \mapsto 0$ ist stetig.

Abgabe: Bis Dienstag, 22.11.2011, 17.45 Uhr