Matthias Makowski, Marcello Sani Universität Konstanz Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Vorlesung Topologie

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)

(i) Seien X, Y topologische Räume und $\pi : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige: Wenn es eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ mit $\pi \circ f = \mathrm{id}_Y$ gibt, dann ist π eine Quotientenabbildung.

(ii) Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Eine Retraktion ist eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r_{|A} = \mathrm{id}_A$. Zeige, dass eine Retraktion eine Quotientenabbildung ist.

(iii) Seien X_i, $i \in I$, topologische Räume und versehe $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie. Fixiere $j \in I$. Die Finaltopologie auf X_j bezüglich der Projektionsabbildung $p_j : X \to X_j$ ist gerade die ursprüngliche Topologie auf X_j.

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)

a) Beweise den Eindeutigkeitssatz der Finaltopologie, d.h. Satz 4.25 im Skript.

b) Beweise den Existenzsatz der Finaltopologie, d.h. Satz 4.26 im Skript.

Aufgabe 5.3. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Sei $\bar{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball des $\mathbb{R}^n$ und bezeichne die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$.

(i) Sei $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und sei $Y = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation bestimmt ist durch $v \sim w :\Leftrightarrow v - w \in \mathbb{Z}^2$ für $v, w \in \mathbb{R}^2$. Wir versehen X mit der Unterraumtopologie und Y mit der Quotiententopologie. Zeige, dass es eine bijektive, stetige Abbildung von Y nach X gibt.

(ii) Sei $N = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Nordpol der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren eine Abbildung $\sigma : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$, indem einem Punkt $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ der Punkt des $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\}$ zugewiesen wird, der durch den Schnittpunkt der Geraden durch N und x mit $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ entsteht. Zeige, dass σ ein Homöomorphismus ist.

(iii) Zeige, dass es einen Homöomorphismus von $\bar{B}_n/\mathbb{S}^{n-1}$ nach $\mathbb{S}^n$ gibt.

Aufgabe 5.4. (4 Punkte)

a) Sei $X = \mathbb{R}^n$. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen in der Zariski-Topologie, wenn es Polynomfunktionen $p_i \in \mathbb{R}[x^1, \ldots, x^n]$ gibt, so dass $\mathbb{R}^n \setminus A = \bigcap\limits_i p_i^{-1}(\{0\})$ gilt. Die abgeschlossenen Mengen sind also gerade die gemeinsamen Nullstellen der gegebenen Polynomfunktionen. Zeige, dass dies eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Hinweis: Formuliere die Axiome einer Topologie zunächst als Bedingungen für abgeschlossene Mengen.

Zusatz: Benutze den Hilbertschen Basissatz um zu zeigen, dass es auch genügt, endliche Mengen von Polynomfunktionen zu betrachten.

b) Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, nicht hausdorffsch ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 20.12.2011, 17.45 Uhr