Matthias Makowski, Marcello Sani Universität Konstanz Wintersemester 2011/2012

# Übungen zur Vorlesung Topologie

## Blatt 6

**Aufgabe 6.1.** (4 Punkte)

a) Sei $X := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_a, 0_b\}$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt offen, falls
   (i) $0_a \notin A$, $0_b \notin A$ und $A \subset \mathbb{R}$ ist offen.
   (ii) $0_a \in A$ oder $0_b \in A$ und $(A \cup \{0\}) \setminus \{0_a, 0_b\} \subset \mathbb{R}$ ist offen.

   Zeige, dass $X$ ein topologischer Raum ist, aber kein Hausdorffraum.
b) Sei $X$ ein Hausdorffraum und $a_1, \ldots, a_n \in X$ seien paarweise verschiedene Punkte. Dann gibt es disjunkte offene Umgebungen $U_i$, $1 \le i \le n$, mit $a_i \in U_i$.

**Aufgabe 6.2.** (4 Punkte)

(i) Sei $X$ ein topologischer Raum und seien $A$, $B \subset X$ abgeschlossen. Sind $A \cap B$ und $A \cup B$ zusammenhängend, so sind $A$ und $B$ zusammenhängend.
(ii) Die Aussage aus (i) wird falsch, wenn $A$ oder $B$ nicht abgeschlossen sind.

**Aufgabe 6.3.** (4 Punkte)
Seien $X$ und $Y$ zusammenhängende Räume. Gelte $A \subsetneq X$ und $B \subsetneq Y$. Zeige, dass dann das Komplement von $A \times B$, $(X \times Y) \setminus (A \times B)$, zusammenhängend ist.

**Aufgabe 6.4.** (4 Punkte)
Zeige, dass die folgende Menge zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist:

$$G := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

**Aufgabe 6.5.** (*zusätzlich* 4 Punkte)
Beweise, dass die folgenden Räume nicht zueinander homöomorph sind:

a) $X_1 := [0, 1]$, $\quad X_2 := [0, 1)$, $\quad X_3 := (0, 1)$.
b) $Y_1 := \mathbb{R}$, $\quad Y_2 := \mathbb{R}^n, n > 1$.

**Abgabe:** Bis Dienstag, 17.01.2012, 17.45 Uhr