Matthias Makowski, Marcello Sani Universität Konstanz Wintersemester 2011/2012

Übungen zur Vorlesung Topologie

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn es für je zwei Punkte a, $b \in X$ und für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $x_1, \ldots, x_n \in X$ gibt mit $x_1 = a$, $x_n = b$ und $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ für $1 \le i \le n-1$.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)

(i) Sei X ein kompakter topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Zeige, dass es ein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ gilt.

(ii) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung, welche
$$\forall\, x, y \in X : d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$
erfüllt. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt ein $x \in X$ mit $f(x) = x$.

Aufgabe 7.3. (4 + *zusätzlich* 2 Punkte)
Seien X, Y topologische Räume.

(i) Bezeichne mit $\pi_X : X \times Y \to X$ die natürliche Projektion auf X. Zeige: Wenn Y kompakt ist, ist π_X eine abgeschlossene Abbildung.

(ii) Sei Y nun kompakt. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn der Graph von f,
$$G_f := \{x \times f(x) : x \in X\},$$
abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)
Sei I eine Indexmenge und seien X_i, $i \in I$, nichtleere, topologische Räume. Zeige, dass $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann lokal kompakt ist, wenn jedes X_i lokal kompakt ist und fast alle X_i kompakt sind.

Abgabe: Bis Dienstag, 31.01.2012, 17.45 Uhr