TOPOLOGIE

MATTHIAS MAKOWSKI

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Topologie an der Universität Konstanz im Wintersemester 2011/12. Dieses Skript wie auch die Vorlesung ist im Wesentlichen eine verkürzte Fassung des Skriptes [4] von Oliver Schnürer.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

In dieser Vorlesung befassen wir uns mit dem mathematischen Gebiet Topologie, genauer gesagt der mengentheoretischen Topologie. In dieser Einleitung wollen wir einen kurzen Einblick in dieses Themengebiet und seine Fragestellungen geben.

Die Topologie befasst sich mit dem Studium von geometrischen Objekten und deren Eigenschaften, wobei sie solche Objekte „identifiziert“, welche zueinander homöomorph sind. Hierbei versteht man in der Topologie unter einem geometrischen Objekt einen topologischen Raum, der wie folgt definiert ist:

Definition 0.1 (Topologie)**.** Sei X eine Menge. Sei $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X. $\mathcal{O}$ heißt Topologie auf X, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.
(ii) $\mathcal{O}$ ist unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen, d. h.

$$O_i \in \mathcal{O}, \quad i \in I \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 54-01.

(iii) $\mathcal{O}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d. h.

$$O_i \in \mathcal{O}, \quad i = 1, \dots, n \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

Ein topologischer Raum ist eine Menge X mit einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X.

Zwei topologische Räume X, Y bezeichnen wir als homöomorph, wenn es eine stetige, bijektive Abbildung $f : X \mapsto Y$ gibt, so dass auch ihre Umkehrabbildung stetig ist. Das bedeutet insbesondere, dass Längenverhältnisse, Winkel, etc. im Studium der Topologie keine Rolle spielen, insofern stellt die Topologie eine Abstraktion vom euklidischen Raum, sogar von metrischen Räumen dar. Die zusätzliche Struktur einer Topologie im Vergleich zu einer Menge beschreibt die Umgebung von Punkten. Dies erlaubt beispielsweise die Unterscheidung von gleichmächtigen Mengen wie $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$, da Punkte in $\mathbb{Z}$ isoliert sind, Punkte in $\mathbb{Q}$ jedoch nicht (im Laufe der Vorlesung wird diese Aussage präziser gemacht).

Eine Aufgabe der Topologie besteht darin, zu entscheiden ob zwei gegebene topologische Räume zueinander homöomorph sind, also topologisch äquivalent sind, oder nicht. Man kann sich aber auch fragen, wie viele verschiedene Klassen von Flächen es gibt, wobei eine Klasse aus allen zueinander topologisch äquivalenten Räumen besteht. Dies ist also der Versuch einer Klassifizierung von bestimmten geometrischen Objekten, wohl eine der wichtigsten Fragestellungen der Geometrie (wobei verschiedene geometrische Theorien eine unterschiedliche Identifizierung von Objekten vornehmen, beispielsweise kann man in der Differentialgeometrie zwei geometrische Objekte dann als gleich betrachten, wenn es eine bijektive längen- und winkeltreue Abbildung zwischen ihnen gibt).

Ein wichtiges Kriterium zur Unterscheidung von verschiedenen topologischen Räumen liefern Invarianten, also gewisse Eigenschaften der Räume, welche unter Homöomorphismen erhalten bleiben. Wie wir später sehen werden, gehören hierzu die in dieser Vorlesung behandelten Eigenschaften wie etwa Kompaktheit, Zusammenhang, Wegzusammenhang, etc.. Denn sobald man feststellt, dass die gegebenen Räume sich in einer Invariante unterscheiden, kann man sofort schliessen, dass sie topologisch nicht äquivalent sind.

Mit den folgenden Beispielen wollen wir diese Ideen ein wenig veranschaulichen:

Seien B_1 der Einheitsball im $\mathbb{R}^2$, R ein beliebiges Rechteck, D ein Dreieck des $\mathbb{R}^2$ und H die obere Hemisphäre der Kugeloberfläche S^2, so sind alle diese Objekte homöomorph. Für B_1, R und D kann man dies leicht mittels geeigneter Streckung einsehen. Das H zu B_1 homöomorph ist sieht man beispielsweise, indem man eine Projektion von H auf die Ebene durchführt, welche die obere und die untere Hemisphäre trennt.

Nun nehme man ein Blatt Papier und klebe es einmal an zwei gegenüberliegenden Seiten zusammen, einmal ohne es zu verdrillen, so dass man ein Band B erhält und einmal indem man das Blatt einmal verdrillt, so dass man ein sogenanntes Möbiusband M erhält. Für eine Begründung (noch kein Beweis), dass diese Räume nicht zueinander homöomorph sind, bedienen wir uns der topologischen

Invarianz des Wegzusammenhangs eines Raumes. Dabei ist ein Raum X wegzusammenhängend, wenn man zwei beliebige Punkte $x, y \in X$ immer durch einen stetigen Weg $\varphi : [0,1] \to X$ mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$ verbinden kann. Hierzu zerschneiden wir sowohl das normale Band B und das Möbiusband M entlang einer Linie, welche parallel zur unverklebten Seite des Blattes verläuft. Dabei bleibt M wegzusammenhängend, wohingegen B in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfällt.

Ein weiteres Beispiel wäre der Torus (Nicht-Mathematikern besser bekannt als die Oberfläche eines Donuts). Dieser ist beispielsweise nicht zur S^2 homöomorph, denn jede geschlossene Kurve auf der S^2 lässt sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen, was beim Torus nicht immer möglich ist (wegen des „Lochs“). Auch bei diesem Beispiel kann man ein ähnliches Argument wie im Falle der Bänder verwenden um zu zeigen, dass die Räume nicht homöomorph sind.

Man kann sich noch viele weitere Fragen stellen, wie etwa ob der $\mathbb{R}^n$ zum $\mathbb{R}^m$ homöomorph ist für $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, bzw. wie es mit den zugehörigen Sphären $\mathbb{S}^n$ und $\mathbb{S}^m$ aussieht. Dass es eine bijektive Abbildung zwischen den entsprechenden Mengen gibt, ist ein Ergebnis der Mengentheorie, doch kann man mit Hilfe von topologischen Mitteln zeigen, dass diese Abbildung und ihre Umkehrabbildung nicht beide stetig sein können.

Zum Abschluss dieses Kapitels soll noch festgehalten werden, dass die mengentheoretische Topologie eine wichtige Grundlage für viele Teilgebiete der Mathematik, wie etwa der algebraischen Topologie, der Differentialgeometrie, der Funktionalanalysis, etc. darstellt. Nachdem man sich vom physikalischen Raum als dem einzigen mathematisch interessanten Raum getrennt hat, hat sich die Topologie als eine Sprache dieser Abstraktionen herausgebildet und umfasst somit nicht nur geometrische Objekte aus dem Anschauungsraum, sondern auch unendlichdimensionale Objekte, wie auch solche, in denen man nicht jeden Punkt von einem anderen trennen kann (eine Eigenschaft, die der geometrischen Intuition etwas zuwiderläuft).

1. Metrische Räume

1.1. **Metrische Räume.** Wir werden sehen, dass jeder metrische Raum ein topologischer Raum ist. Einige Aussagen für topologische Räume sind schon aus den Grundvorlesungen für den Spezialfall von metrischen Räumen bekannt. Wenn wir diese hier wiederholen, so dient dies dazu, Parallelen zwischen metrischen und topologischen Räumen aufzuzeigen.

Definition 1.1 (Metrik)**.** Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls die folgenden Axiome für alle x, y, $z \in X$ erfüllt sind:

(i) $d(x, y) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y$ ist.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Ist X eine Menge und d eine Metrik auf X, so sagen wir (X, d) ist ein metrischer Raum.

Definition 1.2 (Offene Menge)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Sei $a \in X$ und $r > 0$. Wir definieren eine (offene) Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r durch
$$B_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}.$$
(ii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt offen, falls für alle $x \in A$ ein $r > 0$ existiert, so dass $B_r(x) \subset A$ gilt.
(iii) Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus B$ offen ist.

Satz 1.3. *Eine offene Kugel eines metrischen Raumes (X,d) ist eine offene Menge.*

Beweis. Sei $B_r(a)$ die offene Kugel und sei $b \in B_r(a)$. Definiere $\rho := r - d(a,b)$. Für alle $x \in B_\rho(b)$ gilt aufgrund der Dreiecksungleichung
$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a) < \rho + (r - \rho) = r.$$
Somit ist $B_\rho(b) \subset B_r(a)$ und die Behauptung folgt. $\square$

Satz 1.4. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist durch*
$$\mathcal{O} := \{O \subset X : O \text{ ist offen im Sinne der Definition 1.2 (ii)}\}$$
eine Topologie auf X definiert. Wir bezeichnen diese Topologie als die von der Metrik d induzierte Topologie. Falls nicht anders angegeben, werden wir auf metrischen Räumen stets diese von der Metrik induzierte Topologie verwenden.

Beweis.

Wir müssen die Eigenschaften (i), (ii), (iii) einer Topologie nachweisen.

(i) Ist offensichtlich, da für die leere Menge die Offenheit für keinen Punkt überprüft werden muss und da alle Kugeln in X enthalten sind.
(ii) Ist A die Vereinigung offener Mengen $\{O_i\}_{i\in I}$ und $x \in A$, so gibt es ein $i \in I$ und eine zugehörige offene Menge O_i sowie ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset O_i$ ist. Wegen $O_i \subset A$ folgt auch $B_r(x) \subset A$ und somit ist A eine offene Menge.
(iii) Seien $I = \{1, \dots, n\}$, $\{O_i\}_{i\in I}$ eine endliche Familie offener Mengen und $A := \bigcap\limits_{i\in I} O_i$. Wir wollen nachweisen, dass A offen ist.
Fixiere also $x \in A$. Somit gilt $x \in O_i$ für alle $i \in I$. Da die Mengen O_i offen sind, gibt es Zahlen $r_i > 0$, so dass $B_{r_i}(x) \subset O_i$ ist. Wir definieren nun $r := \min\limits_{i\in I} r_i$. Da I endlich ist, ist $r > 0$. Da $r \leq r_i$ ist, folgt $B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \subset O_i$. Damit ist aber $B_r(x)$ auch im Schnitt der Mengen O_i enthalten, also $B_r(x) \subset A$. Dies war zu zeigen.

$\square$

Definition 1.5 (Topologisch äquivalente Metriken)**.** Zwei Metriken d und d' auf einem Raum X heißen topologisch äquivalent, wenn die jeweils induzierten Topologien übereinstimmen.

1.2. **Stetige Abbildungen.**

Definition 1.6 (Stetigkeit)**.** Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume.

(i) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig in $x \in X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $a \in X$ mit $d(a,x) < \delta$ auch $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$ gilt.
(ii) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls sie in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

2. Topologische Räume

Definition 2.1 (Topologie)**.** Sei X eine Menge. Sei $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X. $\mathcal{O}$ heißt Topologie auf X, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.
(ii) $\mathcal{O}$ ist unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen, d. h.

$$O_i \in \mathcal{O}, \quad i \in I \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

(iii) $\mathcal{O}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d. h.

$$O_i \in \mathcal{O}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

Definition 2.2 (Topologischer Raum)**.**

(i) Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, wobei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist. (Wir werden später auch sagen, dass X ein topologischer Raum ist, wenn es bei der Wahl der Topologie nicht zu Verwechslungen kommen kann.)
(ii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt genau dann offen, wenn $A \in \mathcal{O}$ gilt.
(iii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt genau denn abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist, $(X \setminus A) \in \mathcal{O}$. Die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$.

Beispiele 2.3 (Topologische Räume)**.**

(i) Sei X eine Menge. Dann ist $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X. Sie heißt indiskrete Topologie.
(ii) Sei X eine Menge. Dann ist $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X, die diskrete Topologie.
(iii) Sei $X = \mathbb{R}$. Enthält $\mathcal{O}$ gerade die Vereinigungen von offenen Intervallen (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $\mathbb{R}$ ein topologischer Raum. Diese Topologie heißt natürliche Topologie oder Standardtopologie.
(iv) Sei $X = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ wird auch zum topologischen Raum, wenn $\mathcal{O}$ genau aus $\emptyset$, $\mathbb{R}$ und allen Intervallen der Form $(-\infty, a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ besteht.
(v) Sei $X = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ wird ebenso zum topologischen Raum, wenn $\mathcal{O}$ genau aus $\emptyset$, $\mathbb{R}$ und allen Vereinigungen von Intervallen der Form $(-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$ besteht.
(vi) Sei X eine beliebige Menge. Sei $A \in \mathcal{O}$ genau denn, wenn $X \setminus A$ eine endliche Menge ist oder $A = \emptyset$ ist. Diese Topologie heißt kofinite Topologie.
(vii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Metrik d induziert dann nach Satz 1.4 eine Topologie auf X.
Auf diese Weise induziert die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ die natürliche Topologie oder Standardtopologie des $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.4 (Umgebung)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt Umgebung von x, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subset U$ gibt. Ist U zusätzlich offen, so heißt U eine offene Umgebung von x. Die Menge aller Umgebungen von x heißt Umgebungssystem und wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

Satz 2.5. *In einem topologischen Raum* $(X,\mathcal{O})$ *mit* $O \subset X$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) O *ist offen.*
(ii) O *ist eine Umgebung für alle* $x \in O$.
(iii) Zu jedem $x \in O$ *gibt es eine Umgebung* $U \in \mathcal{U}(x)$ *mit* $U \subset O$.

Beweis.

- (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) folgt direkt indem man $U = O$ wählt.
- (3) $\implies$ (1) erhält man, indem man die nach Definition einer Umgebung von x existierende offene Menge A mit $A \subset U \subset O$ und $x \in A$ betrachtet.

□

Definition 2.6 (Rand, ...)**.** Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge von X.

(i) $x \in X$ heißt Berührpunkt von A, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat, d.h. es gilt
$$U \cap A \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(x).$$
(ii) Die Menge der Berührpunkte von A heißt Abschluss (oder abgeschlossene Hülle) von A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.
(iii) Ein Punkt x ist ein innerer Punkt von A, falls A eine Umgebung von x ist.
(iv) Das Innere von A ist als die Menge der inneren Punkte definiert und wird mit $\dot{A}$ bezeichnet, der einfacheren Schreibweise wegen aber auch mit $\operatorname{int}(A)$.
(v) Ein Punkt x heißt Randpunkt von A, wenn er Berührpunkt von A und von $X \setminus A$ ist. Die Menge der Randpunkte von A nennen wir den Rand von A, den wir mit ∂A bezeichnen werden.

Satz 2.7. *Sei* $(X,\mathcal{O})$ *ein topologischer Raum.*

(i) $\overline{A}$ *ist die kleinste abgeschlossene Menge, die* A *enthält, d.h. es gilt*
$$\overline{A} = \bigcap\{F \in \mathcal{F} : A \subset F\}.$$
(ii) $\dot{A}$ *ist die größte offene Menge in* A*, d.h. es gilt*
$$\dot{A} = \bigcup\{O \in \mathcal{O} : O \subset A\}.$$
(iii) $\partial A = \overline{A} \setminus \dot{A}$.

Beweis.

(i) „$\supset$ “: $\overline{A}$ ist abgeschlossen, denn ist $x \in \complement\overline{A}$, so gibt es per Definition von $\overline{A}$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset \complement A$, also eine offene Menge $O \subset U \subset \complement A$ mit $x \in O$. Wäre $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$, so wäre O eine Umgebung von $y \in O \cap \overline{A}$ mit $O \cap A = \emptyset$, im Widerspruch zur Definition von $\overline{A}$. Somit liefert 2.5 die Offenheit von $\complement\overline{A}$, also die Abgeschlossenheit von $\overline{A}$. Die Behauptung folgt nun aus der Definition der rechten Seite.
„$\subset$ “: Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig mit $A \subset F$. Aus der Inklusion folgt mittels der Definition $\overline{A} \subset \overline{F}$. Für eine abgeschlossene Menge F gilt allerdings $F = \overline{F}$, somit gilt $\overline{A} \subset F$. Aus der Beliebigkeit von F folgt die zu zeigende Inklusion.
(ii) Analog zur Aussage für den Abschluss.

(iii) Ein Punkt x ist ein Berührpunkt von A und $X \setminus A$ genau dann, wenn jede (offene) Umgebung von x einen nichtleeren Schnitt mit A und $X \setminus A$ hat. Oder äquivalent: Keine Umgebung von x ist ganz in A oder in $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$ enthalten. Da die beiden Mengen $\dot{A}$ und $X \setminus \overline{A}$ offen sind, gilt folglich $x \notin \dot{A}$ und $x \notin X \setminus \overline{A}$. Somit ist $x \in \overline{A} \setminus \dot{A}$.
Ist umgekehrt $x \in \overline{A} \setminus \dot{A}$, so ist x wegen $x \in \overline{A}$ ein Berührpunkt von A. Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so ist $U \cap X \setminus A \neq \emptyset$, denn sonst wäre A wegen $U \subset A$ eine Umgebung von x und somit $x \in \dot{A}$.

□

Beispiele 2.8. (Rand, …).

(i) Ist $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so ist
$$\dot{I} = (a, b),\ \overline{I} = [a, b],\ \partial I = \{a, b\}.$$
(ii) Ist $O \subset \mathbb{R}^n$ endlich, so ist
$$O = \overline{O} = \partial O.$$
(iii) Ist (X, d) ein metrischer Raum, $x_0, y \in X$ und $r \in R_+$ mit $r < d(x_0, y)$, so gilt für $O = B_r(x_0) \cup \{y\}$
$$\dot{O} = B_r(x_0), \overline{O} = \overline{B}_r(x_0) \cup \{y\}, \partial O = S_r(x_0) \cup \{y\},$$
wobei wir $S_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ definieren.

Definition 2.9 (Basis)**.** Eine Familie $\mathcal{B}$ von offenen Mengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, wenn jede offene Menge von $(X, \mathcal{O})$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Satz 2.10. *Sei $\mathcal{B}$ eine Familie von offenen Mengen von $(X, \mathcal{O})$. Dann ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $(X, \mathcal{O})$, wenn zu jedem $x \in X$ und zu jedem $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in B \subset O$.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition. □

Satz 2.11. *Sei $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$,

(ii) Seien B, $B' \in \mathcal{B}$ und $x \in B \cap B'$. Dann gibt es eine Menge $A \in \mathcal{B}$ mit $x \in A \subset B \cap B'$, d. h. der Schnitt $B \cap B'$ ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Besteht $\mathcal{O}$ aus allen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$, dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$. $\mathcal{O}$ heißt die durch $\mathcal{B}$ definierte Topologie. (Die leere Menge erhält man als Vereinigung über die leere Menge als Indexmenge.)

Jede Topologie $\mathcal{O}'$ auf X, die $\mathcal{B}$ als Basis besitzt, stimmt mit $\mathcal{O}$ überein.

Beweis. Die Menge $\mathcal{B}$ ist gerade so definiert, dass $\mathcal{O}$ insbesondere auch endliche Schnitte von zwei (und damit von endlich vielen) offenen Mengen enthält.

Die Eindeutigkeit folgt, da sich in jeder Topologie jede offene Menge als Vereinigung von offenen Mengen aus der Basis darstellen lässt. □

Beispiele 2.12 (Basen der Topologie)**.** Wir setzen das Beispiel 2.3 fort.

(i) Auf $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis der Topologie.

(ii) Im Beispiel mit den Intervallen der Form $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, bilden die Intervalle der Form $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{Q}$, eine Basis $\mathcal{B}_2$.
(iii) Im Beispiel mit den Intervallen der Form $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, bilden die Intervalle der Form $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{Q}$, keine Basis (dieses System von Mengen bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_3$).
(iv) Sei $X = \mathbb{R}^n$ versehen mit der Standardmetrik. Dann bilden die Kugeln mit rationalen Koordinaten und rationalen Radien eine abzählbare Basis der Standardtopologie.

Definition 2.13 (Subbasis)**.** Sei $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X. Sei $\mathcal{B}$ definiert als die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen in $\mathcal{S}$, so ist $\mathcal{B}$ eine Basis (direktes Nachrechnen). Die Basis erzeugt eine Topologie $\mathcal{O}$, sie heißt die von $\mathcal{S}$ induzierte Topologie. Die Familie $\mathcal{S}$ heißt Erzeugendensystem oder Subbasis dieser Topologie. (Beachte, dass man die Menge X als Schnitt über die leere Menge als Indexmenge bekommt.)

Beispiele 2.14. (Subbasen der Topologie)
(i) Auf $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist $\mathcal{S}_1 := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ eine Subbasis der Topologie.
(ii) Auf $X = \{1, 2, 3\}$ ist $\mathcal{S}_2 := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ eine Subbasis der Topologie $\mathcal{P}(X)$.

Definition 2.15 (Umgebungsbasis)**.** Ein Teilsystem $\mathcal{B}(x)$ des Umgebungssystems $\mathcal{U}(x)$ heißt Umgebungsbasis von x, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $x \in B \subset U$ existiert.

Beispiel 2.16. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$. Dann bilden die Kugeln $B_{\frac{1}{n}}(x)$ eine Umgebungsbasis von x.

3. Stetige Abbildungen

Definition 3.1 (Stetigkeit)**.** Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig (von $(X, \mathcal{O}_1)$ nach $(Y, \mathcal{O}_2)$), falls die Urbilder beliebiger offener Mengen in $(Y, \mathcal{O}_2)$ offene Mengen in $(X, \mathcal{O}_1)$ sind, d. h.

$$\underset{O' \in \mathcal{O}_2}{\forall} f^{-1}(O') \in \mathcal{O}_1.$$

Satz 3.2. *Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen in Y abgeschlossene Mengen in X sind.*

Beweis. Betrachte die Komplemente. Ist $Y = A \,\dot\cup\, B$, so gilt auch

$$X = f^{-1}(A) \,\dot\cup\, f^{-1}(B).$$

□

Beispiele 3.3.

(i) Sei $(X, \mathcal{O}_1)$ ein diskreter topologischer Raum. Dann ist jede Abbildung $f : X \to Y$ für jeden beliebigen topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_2)$ stetig. Diese Eigenschaft charakterisiert die diskrete Topologie.
(ii) Sei $(Y, \mathcal{O}_2)$ ein indiskreter topologischer Raum. Dann ist jede Abbildung $f : X \to Y$ für jeden beliebigen topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_1)$ stetig. Diese Eigenschaft charakterisiert die indiskrete Topologie.

(iii) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, wenn für alle Folgen $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ in X

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$$

gilt. f ist genau dann unterhalbstetig, wenn f bezüglich der Topologie

$$\mathcal{O} := \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

stetig ist.

Der folgende kurze Beweis zeigt die Vorteile der topologischen Definition der Stetigkeit gegenüber der ε-δ-Definition.

Satz 3.4. *Seien $(X,\mathcal{O}_1)$, $(Y,\mathcal{O}_2)$ und $(Z,\mathcal{O}_3)$ topologische Räume. Sind die Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, so ist auch die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Ist $A \subset Z$ offen, so auch $g^{-1}(A)$ und $f^{-1} \circ g^{-1}(A)$ und damit $(g \circ f)^{-1}(A)$. □

Definition 3.5 (Feinheit)**.** Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf einer Menge X. Dann heißt $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2$ gröber als $\mathcal{O}_1$, falls $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ ist, d. h., falls jede offene Menge bezüglich der Topologie von $\mathcal{O}_2$ auch bezüglich der Topologie $\mathcal{O}_1$ offen ist.

Satz 3.6. *Auf einer Menge X ist die Topologie $\mathcal{O}_1$ genau dann feiner als die Topologie $\mathcal{O}_2$, wenn* $\mathrm{id}_X : X \to X$ *eine stetige Abbildung von $(X,\mathcal{O}_1)$ nach $(X,\mathcal{O}_2)$ ist.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition. □

Satz 3.7. *Seien $(X,\mathcal{O}_1)$ und $(Y,\mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebig gewählte Subbasis von $\mathcal{O}_2$. Dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig, wenn die Mengen $f^{-1}(S)$ für alle $S \in \mathcal{S}$ offen in $(X,\mathcal{O}_1)$ sind.*

Beweis. Benutze, dass für alle Mengen $A_i \subset Y$, $i \in I$, die folgenden beiden Identitäten gelten:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \quad \text{und} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

□

Die folgende Definition ähnelt der ε-δ Definition für Stetigkeit aus der Analysis Grundvorlesung.

Definition 3.8 (Stetigkeit in einem Punkt)**.** Seien $(X,\mathcal{O}_1)$ und $(Y,\mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt im Punkte $x \in X$ stetig, falls zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$ existiert.

Satz 3.9. *Seien $(X,\mathcal{O}_1)$ und $(Y,\mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei f stetig, $x \in X$ und $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Dann enthält V eine offene Umgebung V' von $f(x)$. $U := f^{-1}(V')$ ist eine offene Menge, die x enthält und daher eine Umgebung von x mit $f(U) = V' \subset V$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $V \subset Y$ offen. Sei $x \in X$ beliebig mit $f(x) \in V$. V ist eine Umgebung von $f(x)$. Somit gibt es eine (ohne Einschränkung) offene Umgebung von x, U_x, so dass $f(U_x) \subset V$ gilt. Dann ist

$$U := \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$$

offen und gleich $f^{-1}(V)$, da $x \in U_x$ und $f(U_x) \subset V$ gelten. □

Satz 3.10. *Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Dann ist $f : X \to Y$ genau dann im Punkte $x \in X$ stetig, wenn für beliebige Umgebungsbasen $\mathcal{B}(x)$ und $\mathcal{B}(f(x))$ folgendes gilt: Für alle $B \in \mathcal{B}(f(x))$ existiert eine Menge $A \in \mathcal{B}(x)$ mit $f(A) \subset B$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition. □

Wir haben bereits gesehen, dass die Bilder von offenen oder abgeschlossenen Mengen unter stetigen Abbildungen im allgemeinen nicht offen oder abgeschlossen sind.

Definition 3.11 (Offene Abbildungen)**.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ heißt offen, wenn die Bilder offener Mengen wieder offen sind. Sie heißt abgeschlossen, wenn die Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Satz 3.12. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ ist genau dann offen, wenn die Bilder einer Basis von $\mathcal{O}_1$ offen sind.*

Beweis. Direkt aus der Definition. □

Satz 3.13.
Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Sei f abgeschlossen. Ist $B \subset Y$ und $U \subset X$ offen mit $f^{-1}(B) \subset U$, dann existiert eine offene Menge $V \supset B$ mit $f^{-1}(V) \subset U$.
(ii) Sei f offen. Ist $B \subset Y$ und $A \subset X$ abgeschlossen mit $f^{-1}(B) \subset A$, dann existiert eine abgeschlossene Menge $F \supset B$ mit $f^{-1}(F) \subset A$.
(iii) f ist offen $\Longleftrightarrow$ für alle $x \in X$ gilt: Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so ist $f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$.

Beweis.

(i) Die Menge $X \setminus U$ ist abgeschlossen, damit auch $f(X \setminus U)$. $V := Y \setminus (f(X \setminus U))$ ist nun gerade die gesuchte offene Menge. Nach Definition gilt $f^{-1}(V) \subset U$ und $V \supset B$.
(ii) Funktioniert analog. $X \setminus A$ und $f(X \setminus A)$ sind offen. $F := Y \setminus (f(X \setminus A))$ ist die gesuchte abgeschlossene Menge mit $F \supset B$ und $f^{-1}(F) \subset A$.
(iii) „$\Longrightarrow$“: Klar.
„$\Longleftarrow$“: Sei $V \subset X$ offen. Zeige, dass auch $f(V)$ offen ist. Sei $x \in V$. Es genügt zu zeigen, dass $f(x)$ eine (offene) Umgebung in Y besitzt, die in $f(V)$ enthalten ist. Sei dazu $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset V$. Dann gilt $f(U) \subset f(V)$ und $f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$ und die Behauptung folgt.

□

Definition 3.14 (Homöomorphismus)**.** Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt Homöomorphismus oder topologische Abbildung, falls f und f^{-1} stetig sind.

Satz 3.15. *Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist f genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig und offen (oder abgeschlossen) ist.*

Beweis. Direkt aus den Definitionen. $\square$

Bemerkung 3.16. Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ ordnet die offenen Mengen von $(X, \mathcal{O}_1)$ bijektiv den offenen Mengen von $(Y, \mathcal{O}_2)$ zu. Die Zuordnung $F : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ ist gegeben durch $F(O) := f(O)$ für $O \in \mathcal{O}_1$.

4. Erzeugung topologischer Räume I

In diesem Kapitel lernen wir Methoden kennen, mit denen man aus topologischen Räumen neue topologische Räume konstruieren kann.

4.1. **Unterraumtopologie.**

Bemerkung 4.1 (Erinnerung: Metrische Räume). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $E \subset X$ eine Teilmenge. Dann wird E durch die induzierte Metrik $d' := d|_{E\times E}$ auf natürliche Weise zu einem metrischen Raum.

E wird damit auch zu einem topologischen Raum. Die offenen Mengen in (E, d') sind gerade die Mengen $O' \subset E$, für die es eine offene Menge $O \subset X$ mit $O' = O \cap E$ gibt.

Definition 4.2 (Unterraumtopologie)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $E \subset X$. Definiere $\mathcal{O}_E := \{O \cap E : O \in \mathcal{O}\}$. (Wir werden gleich zeigen, dass dies eine Topologie ist. Sie heißt Unterraumtopologie, induzierte Topologie oder Spurtopologie.)

Satz 4.3. *Sei (X, O) ein topologischer Raum, $E \subset X$. Dann ist $(E, \mathcal{O}_E)$ ein topologischer Raum.*

Beweis. Wähle für jede offene Menge $O \subset E$ eine offene Menge $O' \subset X$ mit $O = O' \cap E$ und benutze, dass X ein topologischer Raum ist. $\square$

Bemerkung 4.4. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $E \subset X$. Die offenen (abgeschlossenen) Mengen in $(E, \mathcal{O}_E)$ sind gerade die Schnitte von offenen (abgeschlossenen) Mengen in X mit E.

Beweis. Die Aussage über die offenen Mengen folgt direkt aus der Definition.
Sei nun A eine abgeschlossene Menge in E. Dann ist $E \setminus A$ eine offene Menge in E, es gibt also eine offene Menge $B \subset X$ mit $E \setminus A = E \cap B$. Nun ist $X \setminus B$ abgeschlossen in X und es gilt $A = E \cap X \setminus B$.
Sei umgekehrt B eine abgeschlossene Menge in X und $A := E \cap B$. Dann ist $E \setminus A = E \cap X \setminus B$, also ist $E \setminus A$ offen in E in der Relativtopologie, womit A abgeschlossen in E ist. $\square$

Im Allgemeinen sind die offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmengen von E als Teilmengen von X nicht offen (bzw. abgeschlossen). Es gilt aber der folgende Satz.

Satz 4.5. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $E \subset X$. Die offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmengen von E sind genau dann offen (bzw. abgeschlossen) in X (bezüglich der natürlichen Inklusion), wenn die Menge E offen (bzw. abgeschlossen) in X ist.*

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Beispiel 4.6. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset B \subset X$. Trägt B die von X induzierte Unterraumtopologie, so stimmen die von B und von X induzierten Unterraumtopologien auf A überein.

Satz 4.7. *Sei X ein topologischer Raum, $E \subset X$ und $j : E \to X$ die Inklusionsabbildung. Die Unterraumtopologie $\mathcal{O}_E$ auf E hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $g : Y \to E$ gilt: g ist genau dann stetig, wenn $j \circ g : Y \to X$ stetig ist.
(ii) $\mathcal{O}_E$ ist die gröbste Topologie auf E, so dass die kanonische Injektion $j : E \to X$ stetig ist.

Beweis.

(i) Es gilt: $j \circ g$ ist stetig
$\iff (j \circ g)^{-1}(O)$ ist für alle offenen Mengen $O \subset X$ offen
$\iff g^{-1}\left(j^{-1}(O)\right)$ ist für alle offenen Mengen $O \subset X$ offen
$\iff g^{-1}(O \cap E)$ ist für alle offenen Mengen $O \subset X$ offen
$\iff g^{-1}(O)$ ist für alle offenen Mengen $O \subset E$ offen (d. h. für alle $O \in \mathcal{O}_E$)
$\iff g$ ist stetig.
(ii) Folgt direkt aus der Definition der induzierten Topologie.

□

Satz 4.8. *Seien X und Y topologische Räume, $A \subset X$ sei mit der Unterraumtopologie versehen und $f : X \to Y$ sei stetig im Punkt $x \in A$. Dann ist auch die Restriktion $f|_A : A \to Y$ stetig in x.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition. □

Bemerkung 4.9. Beachte aber, dass die Stetigkeit der Restriktion $f|_A$ nicht impliziert, dass $f : X \to Y$ in einem Punkt aus A stetig ist. Beispiel: $X = Y = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. f ist nirgends stetig, aber $f|_A$ ist in jedem Punkt stetig.

Definition 4.10. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Einbettung von X in Y, wenn f ein Homöomorphismus von X auf $f(X)$, versehen mit der Unterraumtopologie, ist.

Satz 4.11. *Seien X, Y topologische Räume. Die Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann eine Einbettung, wenn die folgenden Kriterien alle erfüllt sind:*

(i) f ist injektiv,
(ii) f ist stetig,
(iii) für alle offenen Mengen $U \subset X$ ist die Bildmenge $f(U)$ in $f(X)$ eine offene Menge, d. h. $f : X \to f(X)$ ist eine offene Abbildung.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition eines Homöomorphismusses. □

4.2. **Produkttopologie.**

Bemerkung 4.12 (Erinnerung: Metrische Räume). Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Dann ist $X_1 \times X_2$ mit der Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

ebenfalls ein metrischer Raum. Dies liefert, induktiv angewandt, gerade die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$. Äquivalente Metriken erhält man durch die Definitionen

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

oder
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2).$$
Dies lässt sich auch direkt auf das Produkt von endlich vielen metrischen Räumen verallgemeinern. Dabei heißen Metriken d und d' auf einer Menge A äquivalent, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für alle a, $b \in A$
$$\frac{1}{c} \cdot d(a,b) \le d'(a,b) \le c \cdot d(a,b)$$
gilt. Wie im Falle des $\mathbb{R}^n$ mit unterschiedlichen Normen sieht man, dass diese Metriken alle äquivalent sind. Im Sinne von Definition 1.5 sind diese Metriken damit insbesondere topologisch äquivalent.

Wir beobachten, dass in endlichen Produkten
$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times \cdots \times X_n$$
Mengen der Form
$$X_1 \times \cdots \times X_{k-1} \times O \times X_{k+1} \times \cdots \times X_n$$
und endliche Schnitte davon eine Basis der von der Metrik induzierten Topologie bilden, wobei $O \subset X_k$ eine offene Menge ist. Mit Hilfe dieser Beobachtung wollen wir auf dem Produkt topologischer Räume eine Topologie definieren.

Definition 4.13 (Produkttopologie)**.** Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Definiere $X := \prod\limits_{i\in I} X_i$ sowie die natürlichen Projektionen $p_i : X \to X_i$ durch $X \ni x = (x^j)_{j\in I} \mapsto x^i \in X_i$.

Auf X definieren wir Elementarmengen: Sei $K \subset I$ endlich und $O_k \subset X_k$ offen für alle $k \in K$. Dann heißt
$$\bigcap_{k\in K} p_k^{-1}(O_k)$$
Elementarmenge von X. Die Elementarmengen bilden die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ (da insbesondere endliche Schnitte von Elementarmengen wieder Elementarmengen sind). Diese Topologie heißt Produkttopologie. $(X, \mathcal{O})$ heißt Produktraum oder topologisches Produkt der $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$. Eine Subbasis dieser Topologie ist durch $\mathcal{S} := \{p_k^{-1}(O_k) : k \in I, O_k \in \mathcal{O}_i\}$ gegeben.

Satz 4.14. *Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ topologische Räume. Seien weiterhin Basen $\mathcal{B}_i$ (beziehungsweise Subbasen $\mathcal{S}_i$) von X_i, $i \in I$, gegeben. Dann ist*
$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{k\in K} p_k^{-1}(B_k) : K \subset I \text{ endlich}, B_k \in \mathcal{B}_k \right\}$$
(beziehungsweise $\mathcal{S} := \{p_k^{-1}(S) : k \in I, S \in \mathcal{S}_k\}$) eine Basis (beziehungsweise Subbasis) der Produkttopologie von $X := \prod\limits_{i\in I} X_i$.

Beweis.

Dies folgt aus der Definition der Produkttopologie und der Definition von Basen beziehungsweise Subbasen. □

Beispiele 4.15.

(i) Auf $\mathbb{R}^n$ stimmt die natürliche Topologie mit der Produkttopologie überein.

(ii) Seien X_i topologische Räume und $A_i \subset X_i$. Dann stimmt auf $A := \prod A_i \subset X := \prod X_i$ die Unterraumtopologie der Produkttopologie von $\prod X_i$ mit der Produkttopologie der Unterraumtopologie der $A_i \subset X_i$ überein.

Beweis.

Wir beweisen nur (ii). Wir bezeichnen mit $p_k : X \to X_i$, $k \in I$, die natürliche Projektion und verwenden dieselbe Bezeichnungsweise für die induzierte Abbildung $p_k : A \to A_i$.

Ist $\mathcal{S}^{X_i}$ eine Subbasis von X_i, so ist $\mathcal{S}^{A_i} := \{S \cap A_i : S \in \mathcal{S}^{X_i}\}$ eine Subbasis von A_i. Es folgt, dass $\mathcal{S}_1^A := \{p_k^{-1}(S) : k \in I, S \in \mathcal{S}^{A_k}\}$ eine Subbasis der Produkttopologie von A ist.

Nun ist $\mathcal{S}^X := \{p_k^{-1}(S) : k \in I, S \in \mathcal{S}_k\}$ eine Subbasis der Produkttopologie von X und $\mathcal{S}_2^A := \{S \cap A : S \in \mathcal{S}_X\}$ eine Subbasis der induzierten Topologie von A in X. Wegen $p_k^{-1}(S) \cap A = p_k^{-1}(S \cap A_k)$ für beliebige $k \in I$ und $S \in \mathcal{S}^{X_i}$ sind die Subbasen $\mathcal{S}_1^A$ und $\mathcal{S}_2^A$ identisch, somit folgt die Behauptung. □

Satz 4.16. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein topologischer Raum mit der Produkttopologie.*

(i) *Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ sind stetig und offen.*
(ii) *Die Produkttopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle Projektionen $p_j : X \to X_j$ stetig sind.*

Beweis.

(i) Direkt aus der Definition.
(ii) Sei $O \subset X_k$ offen, $k \in I$. Daher ist $p_k^{-1}(O)$ offen. Diese Elementarmengen bilden eine Subbasis der Topologie. In jeder anderen Topologie sind diese Mengen aufgrund der Stetigkeit der p_k aber auch offen. Daher kann solch eine Topologie höchstens feiner sein.

□

Sei $(g_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen $g_i : Y \to X_i$ zwischen topologischen Räumen. Dann definiert dies eine Abbildung $g : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ vermöge $g(y) := (g_i(y))_{i \in I}$. Es gilt $g_i = p_i \circ g$. Umgekehrt sei nun eine Abbildung $g : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ gegeben. Dann definiert dies Abbildungen $g_i : Y \to X_i$ vermöge $g_i := p_i \circ g$.

Satz 4.17. *Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $X = \prod_{i \in I} X_i$ das Produkt von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$. Dann ist die Abbildung $g : Y \to X$ genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ die Abbildungen $g_i := p_i \circ g$ stetig sind.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Die Abbildungen g_i sind als Kompositionen stetiger Abbildungen wieder stetig.

„$\Longleftarrow$“: Wir wollen benutzen, dass es nach Satz 3.7 genügt zu zeigen, dass die Urbilder einer Subbasis offen sind. Sei also $O \in \mathcal{O}_i$ offen für ein $i \in I$. Mengen der Form $p_i^{-1}(O)$ bilden eine Subbasis der Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$. Wir erhalten

$$g^{-1}\left(p_i^{-1}(O)\right) = (p_i \circ g)^{-1}(O) = g_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}$$

und die Behauptung folgt. □

Satz 4.18. *Seien X_i und Y_i topologische Räume, $i \in I$, mit $X_j \neq \emptyset$ für alle $j \in I$. Seien $f_i : X_i \to Y_i$, $i \in I$, Abbildungen. Dann ist die Abbildung*

$$
\begin{aligned}
f : \prod_{i\in I} X_i &\to \prod_{i\in I} Y_i, \\
(x_i)_{i\in I} &\mapsto (f_i(x_i))_{i\in I}
\end{aligned}
$$

genau dann stetig, wenn die Abbildungen f_i für alle $i \in I$ stetig sind.

Beweis. Seien $p_i : X \to X_i$ bzw. $\pi_i : Y \to Y_i$ die natürlichen Projektionsabbildungen

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "p_i"] & \prod\limits_{i\in I} Y_i \arrow[d, "\pi_i"] \\
X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[u, bend left, "s_i"] & Y_i.
\end{tikzcd}
$$

„$\Longrightarrow$“: Seien die Abbildungen f_i stetig. Dann ist $f_i \circ p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to Y_i$ stetig und nach Satz 4.17 ist damit auch f stetig, da $f_i \circ p_i = \pi_i \circ f$ gilt.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun f stetig. Sei $(a_i)_{i\in I}$ ein fester Punkt aus $\prod\limits_{i\in I} X_i$. Definiere für jedes $j \in I$ die Abbildung $s_j : X_j \to X$ durch

$$s_j(x_j) = (z_i)_{i\in I} \quad \text{mit} \quad z_i := \begin{cases} a_i & i \neq j, \\ x_j & i = j. \end{cases}$$

Nach Satz 4.17 sind die Abbildungen s_j stetig. Es gilt $f_j = \pi_j \circ f \circ s_j$. Daher ist auch f_j für jedes $j \in I$ stetig. □

Bemerkung 4.19. Vergleichen wir noch einmal die definierenden Eigenschaften der Untterraumtopologie und der Produkttopologie.

(i) Nach Satz 4.7 ist die Unterraumtopologie die gröbste Topologie auf $E \subset X$, so dass die kanonische Inklusionsabbildung $j : E \to X$ stetig ist.
(ii) Nach Satz 4.16 ist die Produkttopologie die gröbste Topologie auf $\prod\limits_{i\in I} X_i$, so dass die Projektionsabbildungen $p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$ stetig sind.
(iii) Weiterhin haben wir gesehen (Sätze 4.7 und 4.17), dass eine Abbildung g von einem topologischen Raum Y in einen Teilraum $E \subset X$ bzw. in einen Produktraum $\prod\limits_{i\in I} X_i$ genau dann stetig ist, wenn $j \circ g$ bzw. $p_i \circ g$ für jedes $i \in I$ stetig sind.

4.3. **Initialtopologie.** Die Eigenschaften aus Bemerkung 4.19 wollen wir verwenden, um die Initialtopologie zu definieren. Sie verallgemeinert die Produkttopologie und die Unterraumtopologie.

Definition 4.20 (Initialtopologie). Sei E eine Menge, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und $(f_i : E \to X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Eine Topologie auf E heißt Initialtopologie bezüglich $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $g : Y \to E$ ist g genau dann eine stetige Abbildung, wenn $f_i \circ g$ für jedes $i \in I$

stetig ist.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & E \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i. \end{tikzcd}$$

Beispiel 4.21. Ist die Indexmenge I einelementig, ist also nur ein $f : E \to X$ gegeben, so sind die offenen Mengen in E in der Initialtopologie gerade die Urbilder offener Mengen in X.

Satz 4.22 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Falls eine Initialtopologie $\mathcal{I}$ auf E bezüglich der Familie $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$ existiert, so ist $\mathcal{I}$ die gröbste Topologie, für die die Abbildungen f_i stetig sind. Daher ist $\mathcal{I}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Betrachte die beiden kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} (E,\mathcal{I}) \arrow[r, "g=\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f_i=f_i\circ\mathrm{id}"'] & (E,\mathcal{I}) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} (E,\mathcal{O}) \arrow[r, "g=\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f_i"'] & (E,\mathcal{I}) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i. \end{tikzcd}$$

Im ersten Diagramm wählen wir $g = \mathrm{id}$. Nach Definition ist g genau dann stetig, wenn $f_i \circ g = f_i$ stetig ist. Die Identität ist stetig, da wir in beiden Räumen dieselbe Topologie verwenden. Somit ist f_i stetig.

Sei auch im zweiten Diagramm $g = \mathrm{id}$. Sei weiterhin $(E, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so dass jede Abbildung $f_i : (E, \mathcal{O}) \to X_i$ stetig ist. Dann ist nach Definition der Initialtopologie auch g selber stetig. Damit muß aber die Topologie $\mathcal{O}$ feiner als die Topologie $\mathcal{I}$ sein. □

Satz 4.23 (Existenzsatz)**.** *Definiere $\mathcal{M}_i := \left\{f_i^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}_i\right\}$. Dann ist $\mathcal{S} := \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ eine Subbasis der Initialtopologie auf E bezüglich $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$.*

Beweis. Die Mengen $\mathcal{M}_i$ und $\mathcal{S}$ sind gerade so definiert, dass die Abbildungen $f_i : E \to X_i$ stetig sind. Ist also g stetig, so ist damit auch $f_i \circ g$ stetig.

Sei nun $f_i \circ g$ für jedes $i \in I$ stetig. Wir wollen nachweisen, dass dann auch g stetig ist. Sei also $S \in \mathcal{S}$. Nach Satz 3.7 genügt es nachzuweisen, dass $g^{-1}(S)$ offen ist. Nach Definition von $\mathcal{S}$ existieren ein $i \in I$ und ein $O \in \mathcal{O}_i$, so dass $S = f_i^{-1}(O)$ ist. Es gilt nun

$$g^{-1}(S) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O)\right) = (f_i \circ g)^{-1}(O).$$

Da nach Voraussetzung $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ stetig ist, ist $g^{-1}(S) = (f_i \circ g)^{-1}(O)$ offen, was zu zeigen war. □

4.4. **Finaltopologie, Quotiententopologie.** Wir wollen wieder universelle Eigenschaften für die Definitionen dieser Topologien verwenden. Hier verwenden wir nun zu den obigen universellen Eigenschaften „duale“ Eigenschaften.

Definition 4.24 (Finaltopologie)**.** Sei E eine Menge, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_i : X_i \to E)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Eine Topologie auf E heißt Finaltopologie bezüglich der Familie $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$, falls sie die folgende Eigenschaft hat:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & E \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $g : E \to Y$ ist g genau dann stetig, wenn $g \circ f_i$ für jedes $i \in I$ stetig ist.

Wie bei der Initialtopologie haben wir einen Existenz- und einen Eindeutigkeitssatz sowie eine Charakterisierung der Finaltopologie.

Satz 4.25 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Falls auf E eine Finaltopologie bezüglich der Familie $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$ existiert, so ist sie die feinste Topologie auf E, für die die Abbildungen f_i stetig sind. Daher ist sie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Ähnlich wie bei der Initialtopologie; Übung. □

Satz 4.26 (Existenzsatz)**.** *Definiere $\mathcal{M}_i := \{O \subset E : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i\}$ und $\mathcal{M} := \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Dann ist $\mathcal{M}$ die Finaltopologie auf E.*

Beweis. Ähnlich wie bei der Initialtopologie; Übung. □

Definition 4.27 (Quotiententopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\pi : X \to X/\!\sim$ die kanonische Projektion auf die Äquivalenzklassen $X/\!\sim$. Die finale Topologie auf $X/\!\sim$ bezüglich π heißt Quotiententopologie auf $X/\!\sim$. Versehen mit dieser Topologie heißt $X/\!\sim$ Quotientenraum oder Faktorraum bezüglich der Relation $\sim$.

Bemerkung 4.28. Die Quotiententopologie auf $X/\!\sim$ ist die feinste Topologie, für die $\pi : X \to X/\!\sim$ stetig ist, d. h. $A \subset X/\!\sim$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(A)$ offen in X ist.

Definition 4.29. Seien X, Y topologische Räume und $\pi : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Die Abbildung π heißt Quotientenabbildung, falls eine Menge $U \subset Y$ genau dann in Y offen ist, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist.

Bemerkung 4.30. Wir möchten folgendes zu Quotientenabbildungen festhalten:

- (i) Die Verknüpfung von Quotientenabbildungen ist wieder eine Quotientenabbildung.
- (ii) Eine surjektive, stetige Abbildung, die ausserdem noch offen oder abgeschlossen ist, ist eine Quotientenabbildung.
- (iii) Die Einschränkung einer Quotientenabbildung auf eine Teilmenge muss keine Quotientenabbildung sein.
- (iv) Produkte von Quotientenabbildungen müssen im Allgemeinen keine Quotientenabbildungen sein.

Wir wollen nun ein Kriterium für die Stetigkeit von Abbildungen angeben, deren Definitionsbereich ein Quotientenraum ist.

Theorem 4.31. *Sei $\pi : X \to Y$ eine Quotientenabbildung. Sei Z ein topologischer Raum und sei $g : X \to Z$ eine Abbildung, die konstant auf den Mengen $\pi^{-1}(y)$, für $y \in Y$, ist. Sei $f : Y \to Z$ die von g induzierte Abbildung, so dass $f \circ \pi = g$. Die induzierte Abbildung f ist genau dann stetig, wenn g stetig ist. Die Abbildung f ist genau dann eine Quotientenabbildung, wenn g eine Quotientenabbildung ist.*

Beweis. Sei f stetig, so ist $g = f \circ \pi$ stetig aufgrund der Stetigkeit von π. Sei hingegen g stetig. Sei $V \subset Z$ offen. Dann ist $\pi^{-1}(f^{-1}(V)) = g^{-1}(V)$ offen. Da π eine Quotientenabbildung ist, ist auch $f^{-1}(V)$ offen, was die Stetigkeit von f beweist.

Sei nun f eine Quotientenabbildung, so ist g eine Komposition von Quotientenabbildungen, also selbst wieder eine Quotientenabbildung. Sei nun g eine Quotientenabbildung. Aus der Surjektivität von g folgt die Surjektivität von f. Sei $V \subset Z$. Nun ist $g^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V))$ genau dann offen in X, wenn $f^{-1}(V)$ offen in Y ist. Da g eine Quotientenabbildung ist, ist V also genau dann offen in Z, wenn $f^{-1}(V)$ offen in Y ist. Hieraus folgt, dass auch f eine Quotientenabbildung ist. □

Korollar 4.32. *Seien X, Z topologische Räume und $g : X \to Z$ sei eine surjektive, stetige Abbildung. Sei*

$$Y := \{g^{-1}(\{z\}) : z \in Z\}.$$

Wir versehen Y mit der Quotiententopologie. Sei $f : Y \to Z$ die von g induzierte bijektive und stetige Abbildung. Dann ist f genau dann ein Homöomorphismus, wenn g eine Quotientenabbildung ist.

Beweis. Die Stetigkeit von f folgt aus dem vorangegangenen Theorem, die Bijektivität aus der Definition von Y. Sei f zunächst ein Homöomorphismus, so ist g als Komposition von Quotientenabbildungen selbst eine Quotientenabbildung. Sei nun g eine Quotientenabbildung, so impliziert das eben bewiesene Theorem, dass f eine Quotientenabbildung ist. Zusammen mit der Bijektivität von f folgt, dass f ein Homöomorphismus ist. □

Beispiel 4.33. (Quotientenräume)

(i) Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Der Quotientenraum $\mathbb{R}/\!\sim$ ist homöomorph zum Einheitskreis $\mathbb{S}^1$.

(ii) Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf X mittels $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$ oder $x, y \in A$. Dann ist $X/A := X/\!\sim$ der Quotientenraum, der durch zusammenschlagen des Teilraums A zu einem Punkt entsteht.

5. Trennungseigenschaften

Dieses Kapitel wollen wir nicht allzu sehr vertiefen.

Bemerkung 5.1 (Metrische Räume). Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien A, $B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es disjunkte Umgebungen U und V von A und B.

Beweis. Für jeden Punkt $a \in A$ ist der Abstand zu B positiv, da $A \subset \complement B$ und B abgeschlossen ist. Er sei gleich $r_a > 0$. Fixiere $B_{r_a/3}(a)$. Wiederhole diese Konstruktion für alle Punkte $a \in A$. Deren Vereinigung $\bigcup\limits_{a \in A} B_{r_a/3}(a)$ ist eine offene Umgebung von A, die zu B disjunkt ist. Dies ist U. Analog erhält man von B ausgehend eine offene Umgebung V von B. Nach Konstruktion gilt $U \cap V = \emptyset$, denn ist $a \in A$ so gilt für $x \in B_{r_a/3}(a)$ die Ungleichung

$$d(x, b) \geq d(a, b) - d(x, a) \geq \frac{2}{3} d(a, b) \geq \frac{2}{3} r_b$$

für beliebige $b \in B$. □

5.1. **Trennungsaxiome.** In allgemeinen topologischen Räumen braucht solch eine Aussage nicht richtig zu sein. Räume, in denen man trotzdem Mengen voneinander durch Umgebungen „trennen“ kann, erfüllen entsprechende Trennungsaxiome.

Definition 5.2 (Trennungsaxiome)**.** Sei X ein topologischer Raum.

(i) X heißt T_1-Raum, falls je zwei Punkte x und y aus X Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ besitzen, die jeweils den anderen Punkt nicht enthalten, $x \notin V$ und $y \notin U$.
(ii) X heißt T_2-Raum oder Hausdorffraum, wenn je zwei Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.
(iii) X heißt T_3-Raum, wenn jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ und jeder Punkt $x \notin A$ disjunkte Umgebungen besitzen.
(iv) X heißt T_{3a}-Raum, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \notin A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ gibt, so dass $f(x) = 1$ gilt und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$.
(v) X heißt T_4-Raum, falls es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen disjunkte Umgebungen gibt.

Definition 5.3.

(i) Ein topologischer Raum heißt regulär, wenn er ein T_3- und ein T_1-Raum ist.
(ii) Ein topologischer Raum heißt vollständig regulär, wenn er ein T_{3a}- und ein T_1-Raum ist.
(iii) Ein topologischer Raum heißt normal, falls er ein T_4- und ein T_1-Raum ist.

Definition 5.4 (Umgebung einer Menge)**.** Sei $A \subset X$ und $B \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in A$, so heißt B Umgebung der Menge A.

Satz 5.5. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist ein T_1-Raum.
(ii) Jede einpunktige Menge ist abgeschlossen. „Punkte sind abgeschlossen.“
(iii) Jede Teilmenge $A \subset X$ ist Durchschnitt aller ihrer Umgebungen.

Beweis.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $a \in X$. Die Menge $\bigcup\limits_{x \neq a} U_x$ ist offen, wenn alle Mengen U_x offen sind. Wähle für U_x jeweils eine offene Menge mit $x \in U_x$, aber $a \notin U_x$, die aufgrund der T_1-Eigenschaft existiert.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Verwende als offene Mengen gerade die Komplemente zu einem gegebenen Punkt.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $a \notin A$. Wähle dann als Umgebung von A die Menge $\bigcup\limits_{x \in A} U_x$ mit Mengen U_x wie oben.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $x \in X$. Sei $a \neq x$. Da die Menge $\{a\}$ Durchschnitt aller ihrer Umgebungen ist, gibt es insbesondere eine Umgebung, die x nicht enthält. Es gibt dann aber auch eine offene Umgebung von a, die x nicht enthält. Die Vereinigung aller dieser Mengen zeigt, dass x abgeschlossen ist. □

Korollar 5.6. *Sei X ein regulärer $(T_3 + T_1)$ topologischer Raum. Dann ist X hausdorffsch.*

Beweis. Nach Satz 5.5 sind Punkte abgeschlossen. Somit folgt aus T_3 auch T_2. □

Satz 5.7. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *X ist hausdorffsch.*
(ii) *Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich der Menge $\{x\}$.*
(iii) *Die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ist abgeschlossen in $X \times X$. ($\Delta := \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$)*

Beweis.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Es gilt

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} \overline{U} = \{x\} \Leftrightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}(x)} \complement\overline{U} = X \setminus \{x\}.$$

Sei also $x \neq y \in X$. Seien $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Sei weiterhin oE V eine offene Umgebung, so gilt $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Also ist $\complement\overline{U} \supset V \ni y$ und somit folgt wegen der Beliebigkeit von y auch $X \setminus \{x\} \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}(x)} \complement\overline{U}$. Die andere Inklusion ist offensichtlich.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Seien $x \neq y \in X$. Nach (ii) gibt es eine abgeschlossene Umgebung $\overline{U} \in \mathcal{U}(x)$ mit $y \notin \overline{U}$. Sei ohne Einschränkung U offen. Dann ist $X \setminus \overline{U}$ eine offene Umgebung von y, die zur offenen Umgebung U von x disjunkt ist. Somit ist X hausdorffsch.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Sei X hausdorffsch und gelte $(x,y) \notin \Delta \subset X \times X$, also $x \neq y$. Dann gibt es offene Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Die Menge $(U \times V) \subset (X \times X)$ ist eine Umgebung von (x,y). Da $U \cap V = \emptyset$ ist, gilt auch $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Nehme nun an, dass die Diagonale abgeschlossen ist. Sei $x \neq y$, also $(x,y) \notin \Delta$. Daher gibt es eine offene Umgebung von (x,y), die einen leeren Schnitt mit der Diagonalen Δ hat. Da offene Umgebungen der Form $U \times V$ eine Basis der offenen Mengen bilden, finden wir auch eine solche Menge, die (x,y) enthält, so dass $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Also sind U und V disjunkte offene Umgebungen von x und y. ☐

Satz 5.8. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann T_3, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis bilden.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei X ein T_3-Raum und sei U eine Umgebung von $x \in X$. Dann ist $X \setminus \dot{U}$ abgeschlossen und enthält den Punkt x nicht. Somit gibt es offene disjunkte Mengen V und W mit $x \in V$ und $\left(X \setminus \dot{U}\right) \subset W$. Es gilt $V \subset X \setminus W$. Da die Menge $X \setminus W$ abgeschlossen ist, folgt auch $\overline{V} \subset X \setminus W$. Da nach Wahl von W die Inklusion $X \setminus \dot{U} \subset W$ gilt, folgt, dass $X \setminus W \subset \dot{U} \subset U$ gilt. Zusammengenommen erhalten wir also $\overline{V} \subset X \setminus W \subset U$. Damit ist $\overline{V}$ eine in U enthaltene abgeschlossene Umgebung mit $x \in V$; die Behauptung folgt.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun $A \neq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $x \in X \setminus A$. Dann ist $X \setminus A$ eine offene Umgebung von x und enthält daher auch eine abgeschlossene Umgebung U mit $x \in U \subset X \setminus A$. Daher sind $\dot{U}$ und $X \setminus U$ offen und disjunkt. Weiterhin gilt $x \in \dot{U}$ und $A \subset X \setminus U$. Daher ist X ein T_3-Raum. ☐

5.2. **Vererbbarkeit von Trennungseigenschaften.**

Satz 5.9. *Sei X ein Hausdorffraum und $A \subset X$. Dann ist auch A (versehen mit der Unterraumtopologie) ein Hausdorffraum.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition. □

Bemerkung 5.10. Man kann zeigen, dass sich die Trennungsaxiome T_1, T_2, T_3 und T_{3a} auf Unterräume vererben. Ein abgeschlossener Unterraum eines T_4-Raumes ist wieder T_4.

Beweis. [5, Kapitel 6 B] □

Satz 5.11. *Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \to X/{\sim}$ die kanonische Projektion. Dann gilt*

(i) Ist $X/{\sim}$ ein Hausdorffraum, dann ist die Relation $\sim$ abgeschlossen in $X \times X$, d. h. die Teilmenge $\{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.
(ii) Sei X regulär (T_1+T_3) und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist X/A hausdorffsch.

Beweis.

(i) Betrachte die Abbildung $\pi \times \pi : X \times X \to (X/{\sim}) \times (X/{\sim})$. Da $X/{\sim}$ hausdorffsch ist, ist die Diagonale $\Delta \subset (X/{\sim}) \times (X/{\sim})$ abgeschlossen. Also ist auch das Urbild der Diagonalen unter der stetigen Abbildung $\pi \times \pi$ abgeschlossen. Dieses Urbild ist aber gerade die Relation $\sim$.
(ii) Sei $x \in A$, $y \notin A$. Dann folgt die für die Hausdorffeigenschaft nötige Trennung gerade aus der T_3-Eigenschaft. Seien $x \notin A$ und $y \notin A$. Seien U_x und U_y zu A disjunkte Umgebungen von x beziehungsweise y. Seien V_x und V_y disjunkte Umgebungen von x und y. Dann sind $U_x \cap V_x$ und $U_y \cap V_y$ die gesuchten Umgebungen. Der Fall $x \in A$, $y \in A$ tritt nicht auf, da diese beiden Punkte identifiziert werden.

□

6. Zusammenhängende Räume

Definition 6.1 (zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt zusammenhängend, wenn X nicht disjunkte Vereinigung von zwei offenen nicht leeren Mengen ist. D. h. gilt $X = O_1 \cup O_2$ für zwei offene nicht leere Mengen O_1 und O_2, so gilt $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

Bemerkung 6.2. Äquivalent dazu ist die Definition, wenn man „offene Mengen" durch „abgeschlossene Mengen" ersetzt.

Satz 6.3. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Mengen sind, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.*

Beweis. Klar (Übung). □

Satz 6.4. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn es eine stetige surjektive Abbildung von X auf einen diskreten Raum mit mindestens zwei Punkten gibt.*

Beweis. Klar (Übung). □

Satz 6.5. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{Z}$ eine stetige Abbildung. Dann ist f konstant.*

Beweis. Klar (Übung). $\square$

Definition 6.6. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt zusammenhängend, wenn A, versehen mit der induzierten Topologie, ein zusammenhängender Raum ist. D. h. es gibt keine offenen Mengen O_1 und O_2 mit $O_1 \cup O_2 \supset A$, $O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset$, $O_1 \cap A \neq \emptyset$ und $O_2 \cap A \neq \emptyset$.

Beispiele 6.7.

(i) Intervalle der Form $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ und (a, b) mit a, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sind zusammenhängend. (Wäre eines dieser Intervalle nicht zusammenhängend, so finden wir Punkte x und y (ohne Einschränkung $x < y$) mit $x \in O_1$ und $y \in O_2$ mit offenen Mengen O_1 und O_2 wie in der Definition einer zusammenhängenden Teilmenge. Betrachte $t := \sup\{z \in [x, y] : z \in O_1\}$. $t \in O_1$ widerspricht der Maximalität, $t \in O_2$ der Definition von t, da das Supremum von Punkten in O_1 durch Punkte in O_1 von unten approximierbar ist. Da aber $t \in O_1 \cup O_2$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch.)

(ii) Außer der leeren Menge sind alle anderen Teilmengen von $\mathbb{R}$ als die oben aufgeführten Intervalle nicht zusammenhängend.

(iii) Die leere Menge und ein Raum, der genau einen Punkt enthält, sind zusammenhängend. Ein diskreter Raum mit zwei oder mehr Punkten ist nicht zusammenhängend.

(iv) $\mathbb{Q}$ ist nicht zusammenhängend. (Zerlege an einer irrationalen Zahl.)

Satz 6.8. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ zusammenhängend. Gilt $A \subset B \subset \overline{A}$, so ist auch B zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen B wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei offene Mengen O_1 und O_2 in X mit $(B \cap O_1) \cup (B \cap O_2) = B$, $(B \cap O_1) \cap (B \cap O_2) = \emptyset$ und $B \cap O_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2$. Es folgt, dass auch $(A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) = A$ und $(A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = \emptyset$ gelten. Wähle nun Punkte $b_i \in B \cap O_i$ für $i = 1, 2$. Es gilt $b_i \in \overline{A}$. Somit gilt für jede offene Menge $O \subset X$ mit $b_i \in O$ auch $O \cap A \neq \emptyset$. Dies liefert aber insbesondere $O_i \cap A \neq \emptyset$. Mit Hilfe der beiden offenen Mengen O_1 und O_2 könnte man also zeigen, dass A nicht zusammenhängend ist. Widerspruch. $\square$

Satz 6.9. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ sei zusammenhängend. Sei $B \subset X$. Enthält A einen inneren Punkt von B und einen äußeren Punkt von B (d. h. einen Punkt, der eine zu B disjunkte Umgebung besitzt), so enthält A auch einen Randpunkt von B.*

Beweis. Wenn A keine Randpunkte von B enthielte, wären die beiden Mengen $\dot{B}$ und $\operatorname{int}(X \backslash B)$ eine Überdeckung von A durch zwei offene Mengen, deren Schnitt mit A jeweils nichtleer wäre. Da A aber zusammenhängend ist, ist dies unmöglich. $\square$

Satz 6.10. *Sei X zusammenhängend und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Falls nicht, so gibt es in $f(X)$ offene disjunkte nichtleere Mengen O_1 und O_2 mit $O_1 \cup O_2 = f(X)$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dann sind die Urbilder $f^{-1}(O_1)$ und $f^{-1}(O_2)$ offene disjunkte nichtleere Mengen, die X überdecken. Widerspruch. $\square$

Korollar 6.11 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei X eine zusammenhängende Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien s, $t \in f(X)$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen s und t an.*

Beweis. $f(X)$ ist ein Intervall. □

Wir möchten nun eine äquivalente Definition vom Zusammenhang einer Menge geben, mit der sich etwas anschaulicher argumentieren lässt.

Definition 6.12. Sei X ein topologischer Raum und $a, b \in X$. Eine einfache Kette zwischen a und b ist eine Folge von offenen Mengen $U_1, \ldots, U_n$ in X mit

(i) $a \in U_1$, $a \notin U_i$ für $i \neq 1$,
(ii) $b \in U_n$, $b \notin U_i$ für $i \neq n$,
(iii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leq 1$.

Beachte, dass wir nicht voraussetzen müssen, dass die offenen Mengen auch zusammenhängend sind.

Lemma 6.13. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X durch offene Mengen. Definiere auf X eine Relation $\sim$ durch $a \sim b :\iff$ Es gibt eine einfache Kette zwischen a und b mit Elementen aus $\mathcal{U}$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen sind offen und abgeschlossen (als Teilmengen von X).*

Beweisskizze. Reflexivität und Symmetrie sind klar. Zur Transitivität: Fügt man die beiden einfachen Ketten aneinander, so erhält man eine verbindende Kette $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m$. Durch Herauslassen von offenen Mengen (am Ende der „U-Kette“ und dann auch noch am Anfang der „V-Kette“) erhält man eine einfache Kette. Dies zeigt die Transitivität.

Einfache Ketten bestehen aus offenen Mengen. Also sind die Äquivalenzklassen offen. Das Komplement einer Äquivalenzklasse ist die Vereinigung aller anderen Äquivalenzklassen und damit auch offen. Somit ist jede Äquivalenzklasse abgeschlossen. □

Satz 6.14. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ und jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ von X durch offene Mengen eine Kette zwischen a und b gibt, deren Elemente aus $\mathcal{U}$ sind.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Sei X nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nicht leere offene Mengen O_1 und $O_2 \subset X$, so dass $O_1 \cup O_2 = X$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ gelten. Dann ist $\mathcal{U} := \{O_1, O_2\}$ eine offene Überdeckung von X. Ist $a \in O_1$ und $b \in O_2$ (solche Punkte existieren, da die beiden Mengen nicht leer sind), so gibt es keine einfache Kette von a nach b, die aus Elementen von $\mathcal{U}$ besteht.

„$\Longrightarrow$“: Betrachte die in Lemma 6.13 beschriebenen Äquivalenzklassen. Diese sind nach diesem Lemma gleichzeitig offen und abgeschlossen. Gibt es zwei Punkte, die nicht durch eine Kette verbunden werden können, also auch nicht zur selben Äquivalenzklasse gehören, so bilden die zugehörigen Äquivalenzklassen (ggf. nach Vereinigung mit weiteren Äquivalenzklassen) O_1 und O_2 eine Zerlegung von X in zwei offene nichtleere Mengen. Somit kann X nicht zusammenhängend sein und die Behauptung folgt. □

Satz 6.15. *Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen eines topologischen Raumes X. Gilt $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, so ist $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir verwenden Satz 6.14. Seien also $a, b \in A$ und sei eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von A durch offene Mengen gegeben. Seien $i, j \in I$ gegeben, so dass $a \in A_i$ und $b \in B_j$ liegt. Sei $c \in \bigcap_{i\in I} A_i$ beliebig. Dann gibt es eine einfache Kette von

a nach c (A_i ist zusammenhängend) und eine einfache Kette von c nach b (A_j ist zusammenhängend). Aufgrund der Transitivität der Äquivalenzrelation „es gibt eine einfache Kette aus Mengen in $\mathcal{U}$" gibt es also auch eine einfache Kette von a nach b und es folgt, dass A zusammenhängend ist. $\square$

Satz 6.16. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ das topologische Produkt nichtleerer Mengen X_i. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn jede Menge X_i zusammenhängend ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$": Ist X zusammenhängend, so ist auch $X_i = p_i(X)$, das Bild unter der stetigen Projektionsabbildung, zusammenhängend.

„$\Longleftarrow$": Seien alle Mengen X_i zusammenhängend. Sei $a \in \prod_{i \in I} X_i$. Sei E als die Menge aller Punkte in $\prod_{i \in I} X_i$ definiert, die mit a in einer gemeinsamen zusammenhängenden Menge liegen. Aus Satz 6.15 folgt dann, dass auch die Menge E zusammenhängend ist, da E die Vereinigung von zusammenhängenden Mengen ist, die alle den fixierten Punkt a enthalten. Wir wollen nun nachweisen, dass $\overline{E} = X$ ist. Dann folgt die Behauptung, denn nach Satz 6.8 ist mit E auch der Abschluss zusammenhängend. Betrachte also eine Elementarmenge $U \neq \emptyset$.

Wir wollen zeigen, dass $E \cap U \neq \emptyset$ ist. Hieraus folgt auch bereits $\overline{E} = X$, denn sei $x \in (\overline{E})^c$, dann gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset (\overline{E})^c$. Da jede Umgebung eine Elementarumgebung enthält, erhalten wir einen Widerspruch.

Die Elementarmenge habe die Form $U = \bigcap_{k \in K} p_k^{-1}(U_k)$, wobei $K \subset I$ eine endliche Teilmenge ist und die Mengen $\emptyset \neq U_k \subset X_k$ offen sind. Wir dürfen annehmen, dass $K = \{1, \ldots, n\}$ gilt. Wähle Punkte $b_k \in U_k$ für $1 \leq k \leq n$. Wir definieren nun die folgenden Mengen:

$$E_1 := \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : x_1 \text{ beliebig}, \ x_i = a_i \text{ sonst} \right\},$$

$$E_2 := \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : x_1 = b_1, \ x_2 \text{ beliebig}, \ x_i = a_i \text{ sonst} \right\},$$

$$\ldots,$$

$$E_n := \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : x_i = b_i, \text{ für } 1 \leq i \leq n-1, \ x_n \text{ beliebig}, \ x_i = a_i \text{ sonst} \right\}.$$

Die Mengen E_i sind homöomorph zu X_i und daher zusammenhängend. Nach Definition ist $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$ für $1 \leq i < n$. Daher ist auch $A := \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ nach Satz 6.15 zusammenhängend. Es gelten $a \in A$ und $a \in E$. Nach Definition von E folgt also $A \subset E$. Nach Definition von E_n ist $\emptyset \neq E_n \cap U$, also auch $E \cap U \neq \emptyset$ und die Behauptung folgt. $\square$

Definition 6.17 (Zusammenhangskomponente)**.** Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen von X, welche x enthalten (und damit die größte zusammenhängende Menge, die x enthält), heißt Zusammenhangskomponente $K(x)$ von x.

Satz 6.18. *Sei X ein topologischer Raum. Seien $x, y \in X$, dann gilt:*

(i) $K(x)$ ist zusammenhängend und abgeschlossen.

(ii) Es gilt $\bigcup\limits_{x\in X} K(x) = X$.
(iii) Es gilt entweder $K(x) = K(y)$ *oder* $K(x) \cap K(y) = \emptyset$.
(iv) Ist O *eine offene und abgeschlossene Menge, die* x *enthält, so gilt* $K(x) \subset O$.

Beweis. Benutze insbesondere die Sätze 6.8 und 6.15 und die Definition von zusammenhängend. □

Somit ist $K(x)$ im Durchschnitt aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen von X, die x enthalten, enthalten. Das folgende Beispiel zeigt, dass hier aber im allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Beispiel 6.19. Bestehe $X \subset \mathbb{R}^2$ aus den Punkten $u := (0,0)$, $v := (0,1)$ und den Strecken $s_i := \left\{\left(\frac{1}{i}, y\right) : 0 \le y \le 1\right\}$ für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. X trage die Unterraumtopologie. Die Mengen s_i sind bezüglich dieser Topologie offen, abgeschlossen und zusammenhängend. Gilt $(x,y) \in s_i$, so folgt $K((x,y)) = s_i$. Die übrigen Zusammenhangskomponenten von X sind durch $K(u) = \{u\}$ und $K(v) = \{v\}$ gegeben. Sei nun O eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X mit $u \in O$. O ist offen, also enthält O Punkte aus fast allen Mengen s_i. Da O offen und abgeschlossen ist, enthält O alle Zusammenhangskomponenten, aus denen O Punkte enthält. Somit gilt für fast alle i auch $s_i \subset O$. Wir sehen also, dass v ein Berührpunkt von O ist. Da O abgeschlossen ist, folgt auch $v \in O$. Es gilt also $\{u, v\} \subset O$. Daher ist $K(u)$ nicht gleich dem Durchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Mengen von X, die u enthalten, da jede solche Menge aufgrund der obigen Überlegungen auch v enthält.

Satz 6.20. *Sei* $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ *und* $x = (x_i) \in X$. *Dann gilt* $K(x) = \prod\limits_{i\in I} K(x_i)$, *wobei* $K(x_i)$ *die Zusammenhangskomponente von* x_i *in* X_i *ist.*

Beweis. Nach Satz 6.16 ist die Menge $\prod\limits_{i\in I} K(x_i)$ zusammenhängend. Wegen $x \in \prod\limits_{i\in I} K(x_i)$ folgt auch $K(x) \supset \prod\limits_{i\in I} K(x_i)$. Nun ist aber auch $K(x)$ selber zusammenhängend. Daher sind die kanonischen Projektionen (als stetige Bilder zusammenhängender Mengen) $p_i(K(x))$ zusammenhängend und enthalten x_i. Es folgt also $p_i(K(x)) \subset K(x_i)$. Daher gilt also auch $K(x) \subset \prod\limits_{i\in I} K(x_i)$ und die Behauptung folgt. □

Definition 6.21 (total unzusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt total unzusammenhängend, falls die Zusammenhangskomponente jedes Punktes nur aus diesem Punkt besteht, also $K(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$ gilt.

Satz 6.22. *Ein topologischer Raum* X *ist genau dann total unzusammenhängend, wenn die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von* X *die einelementigen Teilmengen sind.*

Beispiele 6.23.

(i) Ein diskreter topologischer Raum (also ein Raum, versehen mit der diskreten Topologie), ist total unzusammenhängend.
(ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist total unzusammenhängend.

6.1. **Wegzusammenhang, lokaler Zusammenhang.**

Definition 6.24 (wegzusammenhängend)**.** Sei X ein topologischer Raum und $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$. Eine stetige Abbildung $f : I \to X$ heißt ein Weg in X. Der Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg $f : I \to X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ gibt.

Satz 6.25. *Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Jeder Weg ist in einer Zusammenhangskomponente enthalten. □

Definition 6.26 (lokal zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend)**.**

(i) Ein topologischer Raum X heißt lokal zusammenhängend, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine zusammenhängende Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subset U$ gibt.
(ii) Ein topologischer Raum X heißt lokal wegzusammenhängend, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine wegzusammenhängende Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subset U$ gibt.

Satz 6.27. *Sei X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und sei $\Omega \subset X$ offen. Dann ist Ω genau dann zusammenhängend, wenn Ω wegzusammenhängend ist.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Folgt aus Satz 6.25.
„$\Longrightarrow$“: Wir wenden Satz 6.14 auf eine Überdeckung von X durch wegzusammenhängende Mengen an. □

Korollar 6.28. *Sei X ein normierter Raum und $\Omega \subset X$ offen. Dann ist Ω genau dann zusammenhängend, wenn Ω wegzusammenhängend ist.*

7. Kompakte Räume

Aus der Analysis wissen wir, dass im $\mathbb{R}^n$ beispielsweise Folgenkompaktheit und Überdeckungskompaktheit übereinstimmen. In $\mathbb{R}^n$ sind folgen- und überdeckungskompakte Teilmengen jeweils gerade die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen. Wir wollen hier Kompaktheit etwas genauer untersuchen.

7.1. **Kompakte Räume.**

Definition 7.1 (Kompaktheit)**.** Sei X ein topologischer Raum.

(i) X heißt quasikompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung $(U_i)_{i\in I'}$ mit $I' \subset I$ und $\#I' < \infty$ enthält.
(ii) Ein topologischer Raum heißt kompakt, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist.
(iii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt quasikompakt (kompakt), wenn der Unterraum A quasikompakt (kompakt) ist.
(iv) $A \subset X$ heißt relativ kompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Satz 7.2. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(i) X ist quasikompakt.
(ii) Jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen von X mit $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$ enthält eine endliche Familie $(A_i)_{i\in I'}$ mit $\bigcap\limits_{i\in I'} A_i = \emptyset$.

Beweis.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Man betrachtet die Komplemente: Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$, so ist $(X \setminus A_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Daher gibt es eine endliche Teilmenge $I' \subset I$, so dass $\bigcup\limits_{i\in I'} (X \setminus A_i) = X$ gilt. Es folgt $\bigcap\limits_{i\in I'} A_i = \emptyset$.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Sei nun $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, dann ist mit $A_i := X \setminus O_i$ die Familie $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$. Es existiert folglich eine endliche Indexmenge $I' \subset I$ so dass $\bigcap_{i\in I'} A_i = \emptyset$. Durch Komplementbildung folgt die Behauptung. □

Satz 7.3. *Sei X quasikompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist A quasikompakt.*

Beweis. Sei $\left(\tilde{U}_i\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Zu jeder offenen Menge $\tilde{U}_i \subset A$ finden wir eine offene Menge $U_i \subset X$ mit $U_i \cap A = \tilde{U}_i$. Dann überdeckt $(U_i)_{i\in I}$ zusammen mit $X \setminus A$ die Menge X. Da X quasikompakt ist, gibt es eine endliche Menge $L \subset I$, so dass $X = (X \setminus A) \cup \bigcup\limits_{i\in L} U_i$ gilt. Es folgt $A = \bigcup\limits_{i\in L} \tilde{U}_i$. Also ist A quasikompakt. □

Satz 7.4. *Sei X ein Hausdorffraum, K eine kompakte Teilmenge von X. Dann existiert zu jedem Punkt $x \in X \setminus K$ eine Umgebung U von K und eine Umgebung V von x mit $U \cap V = \emptyset$. Insbesondere ist K eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist X ein Hausdorffraum. Also gibt es zu $x \in X \setminus K$ und $y \in K$ offene Umgebungen $U(y) \in \mathcal{U}(y)$ und $V(y) \in \mathcal{U}(x)$ mit $U(y) \cap V(y) = \emptyset$. Die offenen Mengen $(U(y))_{y\in K}$ bilden eine offene Überdeckung von K. Sei $K' \subset K$ endlich, so dass $K \subset U := \bigcup\limits_{y\in K'} U(y)$ gilt. Definiere $V := \bigcap\limits_{y\in K'} V(y)$. Dann ist V eine offene Umgebung von x mit $U \cap V = \emptyset$. □

Es gibt Beispiele [5, Aufgabe 8.4] von quasikompakten Teilmengen eines quasikompakten Raumes, die nicht abgeschlossen sind. Jedoch gilt der folgende Satz.

Satz 7.5. *Sei X ein kompakter Raum. Dann ist $A \subset X$ genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Folgt aus Satz 7.4.
„$\Longleftarrow$“: Sei A abgeschlossen. Dann ist A nach Satz 7.3 quasikompakt. Da eine Teilmenge eines T_2-Raumes wieder ein T_2-Raum ist, folgt die Behauptung. □

Korollar 7.6. *Ein kompakter Raum ist regulär ($T_1 + T_3$).*

Beweis. In einem T_2-Raum sind Punkte abgeschlossen, also ist er auch ein T_1-Raum. Es folgt aus Satz 7.5, dass ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten Raumes selbst wieder kompakt ist. Nach Satz 7.4 folgt also, dass das Trennungsaxiom T_3 erfüllt ist. □

Es gilt noch mehr.

Satz 7.7. *Ein kompakter Raum ist normal.*

Beweis. Seien A und B abgeschlossene Teilmengen eines kompakten topologischen Raumes mit $A \cap B = \emptyset$. Dann sind A und B nach Satz 7.5 selbst wieder kompakt. Wir gehen nun ganz ähnlich wie im Beweis von Satz 7.4 vor. Benutze Satz 7.4 und erhalte für jedes $x \in A$ offene Umgebungen $U(x) \in \mathcal{U}(x)$ und $V(x)$ von B mit $U(x) \cap V(x) = \emptyset$. Sei $K \subset A$ eine endliche Teilmenge, so dass $A \subset U := \bigcup\limits_{x \in K} U(x)$ gilt. Definiere $V := \bigcap\limits_{x \in K} V(x)$. Dann sind U und V disjunkte offene Umgebungen von A und B. □

7.2. **Folgen.**

Definition 7.8 (konvergente Folgen)**.** Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in X. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $x \in X$, $x_n \to x$, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgeglieder liegen.

Definition 7.9 (Folgenkompaktheit)**.** Ein topologischer Raum heißt folgenkompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge (siehe Definition 7.8) besitzt.

Satz 7.10. *In einem quasikompakten Raum X besitzt jede unendliche Folge einen Häufungspunkt.*

Beweis. Nehmen wir an, die Folge hätte keinen Häufungspunkt. Dann besitzt jeder Punkt von X eine Umgebung, in der nur endlich viele Folgeglieder liegen. Diese Umgebungen bilden eine Überdeckung von X, also gibt es aufgrund der Quasikompaktheit eine endliche Teilüberdeckung von X mit solchen Umgebungen. Ein Widerspruch, da in endlich vielen Umgebungen mit endlich vielen Punkten einer Folge nicht unendlich viele Folgeglieder enthalten sein können. □

Im $\mathbb{R}^n$ haben wir sogar eine deutlich stärkere Charakterisierung von kompakten Mengen. Da die folgenden beiden Sätze aus den Grundvorlesungen bekannt sind, lassen wir deren Beweise aus.

Satz 7.11. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist X genau dann folgenkompakt, wenn X kompakt ist.*

Satz 7.12. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Der folgende Satz besagt: „Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.“

Satz 7.13. *Sei X quasikompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ quasikompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Dann ist $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Aufgrund der Quasikompaktheit von X existiert eine endliche Teilüberdeckung $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i \in L}$ von X. Dann ist $(U_i)_{i \in L}$ eine endliche Überdeckung von $f(X)$ und die Behauptung folgt. □

Satz 7.14. *Sei X quasikompakt, Y hausdorffsch und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f abgeschlossen. Ist f injektiv (bijektiv), so ist f eine Einbettung (ein Homöomorphismus).*

Beweis. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Wir wollen nachweisen, dass auch $f(A)$ abgeschlossen ist. Nach Satz 7.3 ist A als abgeschlossener Teilraum eines quasikompakten Raumes selbst quasikompakt. Nach Satz 7.13 ist damit auch das Bild $f(A)$ quasikompakt. Da Y ein Hausdorffraum ist, ist $f(A)$ sogar kompakt. Nach Satz 7.4 ist damit $f(A)$ abgeschlossen.

Ist f injektiv, so ist $f : X \to f(X)$ eine offene Abbildung. Sei nämlich $O \subset X$ offen. Dann ist $f(X \setminus O) = f(X) \setminus f(O)$ abgeschlossen in $f(X)$. Somit ist $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus und $f : X \to Y$ eine Einbettung, vergleiche auch Satz 4.11. Ist f bijektiv, so ist f natürlich ein Homöomorphismus. □

Satz 7.15. *Seien X, Y topologische Räume, sei Y quasikompakt und sei $x_0 \in X$. Sei $N \subset X \times Y$ offen mit $\{x_0\} \times Y \subset N$. Dann gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $U \times Y \subset N$.*

Beweis. Wir überdecken den kompakten Raum $\{x_0\} \times Y$ mit Mengen der Form $V \times W \subset N$, wobei $V \in \mathcal{U}(x_0)$ und $W \subset Y$ offene Mengen seien. Die Kompaktheit impliziert, dass es ein $n \in \mathbb{N}_+$ gibt, so dass die Mengen $V_1 \times W_1, \ldots, V_n \times W_n$ den Raum $\{x_0\} \times Y$ überdecken.

Wir definieren die offene Menge $U := \bigcap_{i=1}^n V_i$ und zeigen nun, dass $U \times Y \subset N$ gilt.

Sei $(x, y) \in U \times Y$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, mit $(x_0, y) \in V_i \times W_i$. Somit ist $(x, y) \in U \times W_i \subset V_i \times W_i \subset N$. □

Ein wichtiger Satz zu kompakten Mengen in Produkträumen ist der Satz von Tychonoff.

Satz 7.16 (Tychonoff)**.** *Ein nicht leerer Produktraum $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ ist genau dann quasikompakt, wenn jedes X_i quasikompakt ist.*

Bemerkung 7.17. Hieraus sieht man auch sofort, dass beschränkte abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^n$ kompakt sind, wenn man weiß, dass beschränkte abgeschlossene Intervalle kompakt sind. Diese Mengen sind nämlich abgeschlossene Teilmengen von $[-k, k]^n$ für genügend großes $k > 0$.

Zum Beweis des Satzes führen wir noch die Begriffe *Filter* und *Ultrafilter* ein.

7.3. Filter.

Definition 7.18 (Filter)**.** Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$,
(ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
(iii) $F \in \mathcal{F}$ und $F \subset F' \implies F' \in \mathcal{F}$.

Eine Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ heißt Filterbasis für $\mathcal{F}$, wenn jedes Element aus $\mathcal{F}$ ein Element aus $\mathcal{F}_0$ enthält. Sei also $\mathcal{B}$ ein System von Teilmengen von X. Dann ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Filterbasis, wenn es ein nicht leeres System ist, nur nicht leere Teilmengen enthält und für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ stets ein $B_3 \subset X$ enthält, $B_3 \in \mathcal{B}$, mit $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Ist $\mathcal{F}_0$ eine Filterbasis, so erzeugt sie einen Filter $\mathcal{F}$ mittels

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F\}.$$

Wir führen noch einen Konvergenzbegriff für Filter ein:

Definition 7.19. Ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiert gegen $x \in X$, $\mathcal{F} \to x$, wenn $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}(x)$ gilt.

Schließlich benötigen wir noch den Begriff Ultrafilter:

Definition 7.20 (Ultrafilter)**.** Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ Filter auf X. Dann ist $\mathcal{F}_1$ feiner als $\mathcal{F}_2$, falls $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ gilt. $\mathcal{F}_2$ heißt dann gröber als $\mathcal{F}_1$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt Ultrafilter, wenn es keinen Filter auf X gibt, der echt feiner, d.h. feiner und ungleich, als $\mathcal{F}$ ist.

Aus dem Lemma von Zorn erhält man:

Satz 7.21. *Jeder Filter liegt in einem Ultrafilter.*

Wir geben nun eine Charakterisierung von Ultrafiltern an:

Satz 7.22. *Sei X ein topologischer Raum. Ein Filter $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jedes $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Es gilt $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Daher ist höchstens eine dieser beiden Mengen im Filter enthalten. Betrachte zwei Mengen F_1 und F_2, so dass $F_1 \subset A$ und $F_2 \subset X \setminus A$ gilt. Zwei solche Mengen können nicht gleichzeitig in $\mathcal{F}$ sein. Also gilt für alle $F \in \mathcal{F}$, dass entweder $F \cap A \neq \emptyset$ oder $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ ist. (Falls nicht, so finden wir nämlich zwei Mengen F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $F_1 \cap A = \emptyset$ und $F_2 \cap (X \setminus A) = \emptyset$, also $F_1 \subset X \setminus A$ und $F_2 \subset A$ und wir erhalten einen Widerspruch zu den obigen Überlegungen.) Wir nehmen ohne Einschränkung (da A eine beliebige Menge war) an, dass $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$.

Daher ist $\{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis. Der zugehörige Filter $\mathcal{G}$ ist feiner als $\mathcal{F}$ und enthält A. Nach Voraussetzung ist aber $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und somit folgt aus $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, dass $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ gilt. Da $A \in \mathcal{G}$ ist, ist auch $A \in \mathcal{F}$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter, der für alle Teilmengen $A \subset X$ entweder A oder $X \setminus A$ enthält. Gäbe es einen Filter $\mathcal{G}$, der echt feiner als $\mathcal{F}$ wäre, so gibt es ein $G \in \mathcal{G}$, so dass $G \notin \mathcal{F}$ ist. Nach Voraussetzung gilt dann aber $X \setminus G \in \mathcal{F}$ und auch $X \setminus G \in \mathcal{G}$, da $\mathcal{G}$ feiner als $\mathcal{F}$ ist. Der Filter $\mathcal{G}$ enthält daher G und $X \setminus G$. Widerspruch. $\square$

Man kann die Kompaktheit eines Raumes mittels der Konvergenz seiner Ultrafilter charakterisieren:

Satz 7.23. *Sei X ein topologischer Raum. X ist genau dann quasikompakt,wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Nehme an, $\mathcal{F}$ sei ein nichtkonvergenter Ultrafilter auf X. Es gibt also für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_x \notin \mathcal{F}$. Da X kompakt ist überdecken endlich viele dieser U_x bereits X. Die Komplemente dieser U_x liegen aufgrund von Satz 7.22 in $\mathcal{F}$, deren Durchschnitt ist allerdings leer, im Widerspruch zur Definition eines Filters.

„$\Longleftarrow$“: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Definiere $A_L := X \setminus \bigcup\limits_{i \in L} U_i$ für endliche Teilmengen $L \subset I$. Da die Familie $(U_i)_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, ist $A_L \neq \emptyset$. Da $\left(X \setminus \bigcup\limits_{i \in L} U_i\right) \cap \left(X \setminus \bigcup\limits_{i \in K} U_i\right) = X \setminus \bigcup\limits_{i \in L \cup K} U_i$ gilt und diese Mengen stets nichtleer sind, bilden sie eine Filterbasis zu einem Filter $\mathcal{F}$. Verfeinere $\mathcal{F}$ zu einem Ultrafilter $\mathcal{G}$. Nach Voraussetzung konvergiert $\mathcal{G}$ gegen ein $x \in X$. Da die Mengen U_i eine Überdeckung von X bilden, gibt es ein i_0, so dass $x \in U_{i_0}$ ist. Da $\mathcal{G} \to x$ gilt und

$U_{i_0} \in \mathcal{U}(x)$ ist, folgt $U_{i_0} \in \mathcal{G}$. Nach Konstruktion gilt aber $(X \setminus U_{i_0}) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ ein Filter ist, erhalten wir einen Widerspruch. □

Wir werden nun sehen, wie man mit Hilfe von Filtern die Stetigkeit von Abbildungen beschreiben kann.

Definition 7.24 (Berührpunkt, Bildfilter)**.**

(i) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir bezeichnen mit $f(\mathcal{F})$ den Filter auf Y, der $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ als Basis hat. $f(\mathcal{F})$ heißt das Bild des Filters $\mathcal{F}$ unter f oder der Bildfilter.
(ii) Ein Punkt $x \in X$ heißt Berührpunkt des Filters $\mathcal{F}$, wenn $F \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und alle $F \in \mathcal{F}$ gilt. Die Menge der Berührpunkte ist daher $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Beispiele 7.25.

(i) Ein Limespunkt eines Filters $\mathcal{F}$ ist auch Berührpunkt von $\mathcal{F}$.
(ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X. Sei $\mathcal{F}$ der von der Folge erzeugte Filter. Dann ist x genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn x ein Berührpunkt des Filters $\mathcal{F}$ ist.
(iii) Sei $\mathcal{F}$ der von der Filterbasis $\{(0, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ auf $\mathbb{R}$ erzeugte Filter. Dann gilt $\mathcal{F} \to 0$.

Satz 7.26. *Seien X und Y topologische Räume und sei $A \subset X$.*

(i) Es ist $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn ein Filter $\mathcal{F}$ auf X existiert, so dass $A \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \to x$ gelten.
(ii) Die Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann in $x \in X$ stetig, wenn das Bild jedes gegen $x \in X$ konvergierenden Filters gegen $f(x)$ konvergiert.
(„$\mathcal{F} \to x \implies f(\mathcal{F}) \to f(x)$“).

Beweis.

(i) „$\Longrightarrow$“: Sei $x \in \overline{A}$. Dann ist $\{A \cap U : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine Filterbasis für einen Filter, der A enthält und gegen x konvergiert.
„$\Longleftarrow$“: Gelten $\mathcal{F} \to x$ und $A \in \mathcal{F}$, so ist x insbesondere Berührpunkt von $\mathcal{F}$. Damit ist $x \in \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subset \overline{A}$.
(ii) „$\Longrightarrow$“: Sei $f : X \to Y$ in x stetig und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$. Da f in x stetig ist, gibt es zu einer (beliebigen) Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x, so dass $f(U) \subset V$ gilt. Da $\mathcal{F} \to x$ konvergiert, ist $U \in \mathcal{F}$. Somit ist $V \in f(\mathcal{F})$. V war beliebig, also folgt $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.
„$\Longleftarrow$“: Gelte nun für jeden Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \to x$ auch $f(\mathcal{F}) \to f(x)$. Eine Umgebung V von $f(x)$ gehört damit zum Bildfilter $f(\mathcal{F})$, $V \in f(\mathcal{F})$. Nach Definition des Bildfilters gibt es daher ein $U \in \mathcal{F}$ mit $f(U) \subset V$. Nehmen wir für $\mathcal{F}$ den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$, so folgt, dass U auch eine Umgebung von x ist. Somit ist f in x stetig.

□

Die Konvergenz von Filtern auf Räumen, die eine Initialtopologie tragen, lässt sich auf die definierenden Abbildungen der Initialtopologie zurückführen:

Satz 7.27. *Sei X eine Menge, $(X_i)_{i\in I}$ sei eine Familie topologischer Räume und X trage die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen $f_i : X \to X_i$. Dann konvergiert* *ein Filter $\mathcal{F}$ auf X genau dann gegen $x \in X$, wenn $f_i(\mathcal{F}) \to f_i(x)$ für alle $i \in I$ konvergiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Klar, da die Abbildungen f_i stetig sind.
„$\Longleftarrow$“: Das System

$$\left\{ \bigcap_{k\in K} f_k^{-1}(U_k) : K \subset I \text{ endlich}, U_k \in \mathcal{U}(f_k(x)) \right\}$$

ist eine Umgebungsbasis für x. Es ist nachzuweisen, dass eine solche Menge zum Filter $\mathcal{F}$ gehört. Es genügt zu zeigen, dass es ein $F \in \mathcal{F}$ gibt mit $F \subset \bigcap\limits_{k\in K} f_k^{-1}(U_k)$. Nach Annahme gibt es zu $U_k \in \mathcal{U}(f_k(x))$ ein $F_k \in \mathcal{F}$, so dass $f_k(F_k) \subset U_k$ ist. Daher ist $F := \bigcap\limits_{k\in K} F_k \in \mathcal{F}$. Nach Konstruktion ist aber $F_k \subset f_k^{-1}(U_k)$ und es folgt $F \subset \bigcap\limits_{k\in K} f_k^{-1}(U_k)$, wie behauptet. □

Korollar 7.28. *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. $\prod\limits_{i\in I} X_i$ trage die Produkttopologie. Seien $p_i : X \to X_i$ die kanonischen Projektionsabbildungen. Dann konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X genau dann gegen ein $x \in X$, wenn $p_i(\mathcal{F}) \to p_i(x)$ für alle $i \in I$ gilt.*

Beweis. Die Produkttopologie ist eine Initialtopologie. □

Beweis des Satzes von Tychonoff.
„$\Longrightarrow$“: Sei X quasikompakt. Dann ist $X_i = p_i(X)$ als stetiges Bild eines quasikompakten Raumes wieder quasikompakt.
„$\Longleftarrow$“: Nach Satz 7.2 genügt es zu zeigen, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Sei also $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann sind die Bildfilter $p_i(\mathcal{F})$ für alle $i \in I$ selbst wieder Ultrafilter. ($p_i(\mathcal{F})$ ist ein Ultrafilter, da er jede Menge A oder ihr Komplement enthält, da $\mathcal{F}$ entweder $p_i^{-1}(A)$ oder $p_i^{-1}(X_i \setminus A)$ enthält, siehe Satz 7.22.) Nach Voraussetzung sind die Mengen X_i quasikompakt, also erhalten wir die Konvergenz $p_i(\mathcal{F}) \to x_i$ für alle $i \in I$ für Punkte $x_i \in X_i$. Nach Korollar 7.28 gilt also $\mathcal{F} \to x := (x_i)_{i\in I}$ und die Behauptung folgt. □

7.4. **Lokalkompakte Räume.**

Definition 7.29. Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X lokal kompakt, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Bemerkung 7.30. Alternativ könnte man definieren, dass X lokal kompakt ist, wenn X hausdorffsch ist und wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Umgebungen besitzt. Dies rechtfertigt die Bezeichnung „lokal“. Benutze für den Nachweis der Äquivalenz der beiden Definitionen Satz 5.8 und die Tatsache, siehe Satz 7.32, dass X ein T_3-Raum ist.

Beispiele 7.31.

(i) Offensichtlich ist jeder kompakte Raum lokal kompakt.
(ii) Der $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt.
(iii) In einem lokal kompakten Raum X ist jeder Teilraum, der Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Menge in X ist, selbst lokal kompakt. (Sei $x \in A \cap B$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$ eine kompakte Umgebung von $\{x\}$ und nehme an, $U \subset$

A, dies ist aufgrund der Offenheit von A und der vorangegangenen Bemerkung möglich. $\tilde{U} := U \cap B$ ist dann in $A \cap B$ kompakt, da B abgeschlossen ist, und es ist eine Umgebung von $\{x\}$ in $A \cap B$.)

Satz 7.32. *Sei X ein lokal kompakter Raum. Dann ist X regulär ($T_1 + T_3$).*

Beweis. Wir brauchen nur nachzuweisen, dass X ein T_3-Raum ist, da er nach Voraussetzung T_2 und damit T_1 ist. Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Sei weiterhin K eine kompakte Umgebung von x. Dann ist K abgeschlossen und nach Korollar 7.6 auch regulär. Somit gibt es offene Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \subset X$, so dass $A \cap K \subset V$ ist und $U \cap V \cap K = \emptyset$. Wir dürfen weiterhin ohne Einschränkung annehmen (K ist selbst Umgebung), dass $U \subset K$ gilt. Dann sind U und $V \cup (X \setminus K)$ offene Mengen, die zeigen, dass X ein T_3-Raum ist. □

Satz 7.33 (Alexandroff-Kompaktifizierung)**.** *Sei X ein lokal kompakter Raum. Dann gibt es einen bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmten kompakten Raum Y, der einen zu X homöomorphen Raum X_1 enthält, so dass $Y \setminus X_1 =: \{\infty\}$ aus einem Punkt besteht. Ist X nicht kompakt, so ist X_1 dicht in Y. ∞ heißt der unendlich ferne Punkt.*

Beweis. Sei ∞ ein Punkt, der nicht zu X gehört. Definiere $Y := X \cup \{\infty\}$. Auf Y definieren wir eine Topologie durch die folgende Festlegung: Alle Mengen die in X offen sind, seien auch in Y offen. Weiterhin seien alle Mengen der Form $Y \setminus K$ für eine kompakte Menge $K \subset X$ offen. Dies definiert eine Topologie auf Y. Es gilt nämlich

(i) In einem Hausdorffraum ist die endliche Vereinigung kompakter Mengen wieder kompakt, was das Schnittaxiom für offene Mengen zeigt, die alle den Punkt ∞ enthalten.
(ii) Da kompakte Mengen abgeschlossen sind, ist $(Y \setminus K) \cap X$ offen in X. Somit folgt das Schnittaxiom.
(iii) Beliebige Durchschnitte kompakter Mengen sind als abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wieder kompakt. Also sind beliebige Vereinigungen von offenen Mengen, die ∞ enthalten, wieder offen.
(iv) Das allgemeine Vereinigungsaxiom folgt nun, da der Durchschnitt einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge wieder kompakt ist.

Nach Definition ist $X_1 := Y \setminus \{\infty\}$ ein zu X homöomorpher Unterraum von Y.

Mit dieser Topologie ist Y ein kompakter topologischer Raum: Zunächst einmal ist Y hausdorffsch. Punkte in X lassen sich trennen, da X hausdorffsch ist. Sei $x \in X$. Da x eine kompakte Umgebung $K(x) \subset X$ besitzt, sind $K(x)$ und $Y \setminus K(x)$ disjunkte Umgebungen von x und ∞. Schließlich enthält $K(x)$ auch noch eine offene Umgebung von x. Die Quasikompaktheit folgt direkt, denn jede offene Überdeckung von Y enthält eine Menge der Form $Y \setminus K$ für eine kompakte Menge $K \subset X$ und der Rest ist kompakt.

Sei Y' ein weiterer Raum, der die Bedingungen des Satzes erfüllt. Sei X' ein zu X homöomorpher Unterraum, so dass $Y' \setminus X' = \{\infty'\}$ aus einem Punkt besteht. Sei $f : X \to X'$ ein Homöomorphismus und $F : Y \to Y'$ die Fortsetzung von f mit $F(\infty) := \infty'$. Nach Konstruktion ist F bijektiv. Für alle offenen Mengen, die ∞' nicht enthalten ist das Urbild offen, da f ein Homöomorphismus ist.

Betrachte nun eine offene Umgebung von ∞' in Y'. Ihr Komplement ist eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes Y' und daher selbst kompakt.

Unter dem Homöomorphismus $f^{-1} : X' \to X$ werden kompakte Teilmengen auf kompakte Teilmengen abgebildet. Also ist $f^{-1}(K')$ für alle kompakten Mengen $K' \subset Y'$ selbst wieder kompakt. Somit sind die Urbilder aller offenen Mengen offen, F ist also stetig.

Da wir nun wissen, dass F stetig ist, können wir Satz 7.14 anwenden und erhalten, dass F ein Homöomorphismus ist.

X_1 ist ein dichter Teilraum, da $Y \setminus X_1$ nur aus ∞ besteht und jede Umgebung von ∞ einen nichtleeren Schnitt mit X_1 hat, falls X nicht selbst schon kompakt ist. □

Definition 7.34. Seien X und Y lokal kompakte Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt eigentlich, wenn für jede kompakte Menge $K \subset Y$ die Menge $f^{-1}(K)$ kompakt in X ist.

Satz 7.35. *Seien X, Y lokal kompakt und X', Y' die zugehörigen Alexandroff-Kompaktifizierungen mit unendlich fernen Punkten ∞ beziehungsweise ∞'. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann lässt sich f genau dann durch die Festsetzung $f'(\infty) := \infty'$ zu einer stetigen Abbildung $f' : X' \to Y'$ fortsetzen, wenn f eigentlich ist.*

Beweis. Zeige, dass die Urbilder offener Mengen, die ∞' enthalten, genau dann offen sind, wenn f eigentlich ist. Durch Übergang zu Komplementen sieht man, dass dies genau dann der Fall ist, wenn Urbilder kompakter Mengen in Y in X auch wieder kompakt sind. Die Behauptung folgt. □

Satz 7.36. *Seien X und Y lokal kompakt und $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung. Dann ist f abgeschlossen und $f(X)$ lokal kompakt.*

Beweis. Sei $f' : X' \to Y'$ die stetige Fortsetzung von f auf die Alexandroff-Kompaktifizierung wie in Satz 7.35. Dann ist f' nach Satz 7.14 auch abgeschlossen. Eine Menge $A \subset X$ ist nach Konstruktion der Alexandroff-Kompaktifizierung genau dann in X abgeschlossen, wenn $A \cup \{\infty\}$ in X' abgeschlossen ist. Nun ist $f'(A \cup \{\infty\}) = f(A) \cup \{\infty'\}$ als Bild einer kompakten Menge selbst wieder kompakt. Daher ist, wiederum aufgrund der obigen Charakterisierung von abgeschlossenen Mengen in X, auch f selber eine abgeschlossene Abbildung.

Es gilt $f(X) = f'(X') \cap Y$. Da $f'(X')$ kompakt ist, ist $f(X)$ der Durchschnitt einer abgeschlossenen und einer offenen Menge in einem lokal kompakten Raum. Nach Beispiel 7.31 ist $f(X)$ daher lokal kompakt. □

8. Erzeugung topologischer Räume II

8.1. **Identifizierungstopologie, Zusammenkleben von Räumen.**

Satz 8.1. *Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Definiere auf X die Äquivalenzrelation $\sim$ durch*

$$x \sim y :\iff f(x) = f(y).$$

Zerlege f wie folgt in eine surjektive, eine bijektive und eine injektive Abbildung:

(8.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/{\sim} \arrow[r, "\overline{f}"] & f(X). \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Dann gilt

(i) *Die Abbildungen* π, $\overline{f}$ *und* j *sind stetig.*

(ii) *Die Abbildung* $\overline{f}$ *ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn das Bild jeder offenen (oder jeder abgeschlossenen) Menge der Form* $f^{-1}(A)$ *offen (bzw. abgeschlossen) in* $f(X)$ *ist.*

Beweis.

(i) Nach Definition der Quotiententopologie auf $X/\sim$ ist π stetig. Die Abbildung j ist als die kanonische Injektion des mit der Unterraumtopologie versehenen Raumes $f(X) \subset Y$ in Y stetig. Die Unterraumtopologie auf $f(X)$ stimmt nach Beispiel 4.21 mit der Initialtopologie bezüglich der Injektionsabbildung $j : f(X) \to Y$ überein. Die Abbildung $f = j \circ \overline{f} \circ \pi$ ist stetig. Dies ist nach Definition der Initialtopologie äquivalent zur Stetigkeit von $\overline{f} \circ \pi$. Da die Quotiententopologie auf $X/\sim$ mit der Finaltopologie bezüglich $\pi : X \to X/\sim$ übereinstimmt, ist die Stetigkeit von $\overline{f} \circ \pi$ äquivalent zur Stetigkeit von $\overline{f}$.

(ii) Die Mengen in $X/\sim$ sind gerade von dieser Form. Daher folgt die Aussage, denn eine stetige offene bijektive Abbildung ist ein Homöomorphismus (Satz 3.15).

□

Definition 8.2 (Identifizierungstopologie)**.** Ist in der Zerlegung in (8.1) die Abbildung $\overline{f}$ ein Homöomorphismus, so heißt f identifizierende Abbildung. Ist f zusätzlich surjektiv, so heißt die Topologie von Y Identifizierungstopologie bezüglich f. (Es handelt sich dann nämlich um dieselbe Topologie wie auf X, wenn man dort Punkte mit gleichen Bildern identifiziert und die Quotiententopologie bezüglich dieser Identifikation verwendet.)

Bemerkung 8.3. Trägt Y die Identifizierungstopologie, so vereinfacht sich die Zerlegung von f in (8.1) zu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y. \\ & X/\sim \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 8.4. *Ist* $f : X \to Y$ *stetig, surjektiv und offen oder abgeschlossen, so trägt* Y *die Identifizierungstopologie bezüglich* f*.*

Beweis. Beachte dazu, dass die Voraussetzungen an Offenheit oder Abgeschlossenheit stärker sind als in Satz 8.1. □

Bemerkung 8.5. Aus Definition 8.2 und Satz 8.4 folgt nun, dass jede stetige Abbildung eines quasikompakten Raumes in einen Hausdorffraum identifizierend ist.

Beispiele 8.6.

(i) Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ gegeben durch $x \mapsto (\sin x, \cos x)$. Dann ist f eine abgeschlossene surjektive stetige Abbildung. Somit ist $[0, 2\pi]/\sim_f$ homöomorph zum Einheitskreis. (Dasselbe Beispiel funktioniert auch mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, nur muss man dann benutzen, dass f offen ist.)

(ii) Sei $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Definiere auf X eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch $x \sim y :\Longleftrightarrow \underset{\lambda>0}{\exists} : x = \lambda y$. Die Abbildung $\overline{f} : X/\!\sim\, \to \mathbb{S}^n$ mit $\overline{f}([x]_\sim) = \frac{x}{|x|}$ ist ein Homöomorphismus. Sei $\pi : X \to X/\!\sim$ die kanonische Projektion. Die Identifizierungstopologie auf $\mathbb{S}^n$ bezüglich $f = \overline{f} \circ \pi$ stimmt daher mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{S}^n$ überein.

Definition 8.7 (Topologische Summe)**.** Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie disjunkter topologischer Räume. Dann heißt $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$, versehen mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Injektionen $j_i : X_i \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, topologische Summe von $(X_i)_{i\in I}$.

Sind die Teilmengen X_i nicht disjunkt, so geht man vorher zur Familie $(X_i \times \{i\})_{i\in I}$ über.

Bemerkung 8.8. Eine Teilmenge $O \subset \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ ist genau dann offen, wenn für jedes $i \in I$ die Menge $O \cap X_i$ in X_i offen ist. Auf den Mengen X_i induziert die Topologie auf $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ als Teilraumtopologie die ursprüngliche Topologie $\mathcal{O}_i$ auf X_i.

Definition 8.9 (Zusammenkleben von Räumen)**.** Seien X und Y disjunkte topologische Räume, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren auf $X \cup Y$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$z_1 \sim z_2 :\Longleftrightarrow \begin{cases} (z_1,\, z_2 \in A & \text{und} \quad f(z_1) = f(z_2)) \quad \text{oder} \\ (z_1 \in A,\, z_2 \in f(A) & \text{und} \quad f(z_1) = z_2) \quad \text{oder} \\ (z_2 \in A,\, z_1 \in f(A) & \text{und} \quad f(z_2) = z_1) \quad \text{oder} \\ & \qquad\quad (z_1 = z_2). \end{cases}$$

Den Faktorraum $(X \cup Y)/\!\sim$ bezeichnen wir mit $Y \cup_f X$. $Y \cup_f X$ heißt der durch Zusammenkleben von X mit Y mittels f entstandene Raum.

Bemerkung 8.10. Insbesondere werden beim Zusammenkleben von $X \cup Y$ zu $Y \cup_f X$ die Punkte aus $f(A)$ mit allen ihren Urbildern identifiziert.

Beispiele 8.11.

(i) Sei $X = [0, 1]$, $A = \{0\} \cup \{1\}$, $Y = [2, 3]$ und $f(0) = 2$, $f(1) = 3$. Dann ist $X \cup_f Y$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$.

(ii) Sei $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$, $A = \partial B_1(0)$, $Y = \{p\}$ eine einpunktige Menge und sei $f(x) = p$ für alle $x \in A$. Dann ist $Y \cup_f X$ homöomorph zu $\mathbb{S}^n$.

Definition 8.12 (Ankleben von Zellen)**.** Definiere $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ als die abgeschlossene n-dimensionale Einheitskugel, $e^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ als die offene n-dimensionale Einheitskugel und $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B_1(0) \equiv D^n \setminus \dot{D}^n$ als die $(n-1)$-dimensionale Sphäre. Wir nennen auch D^n einen n-dimensionalen Ball, e^n eine n-dimensionale Zelle und $\mathbb{S}^n$ eine n-dimensionale Sphäre.

Sei X ein topologischer Raum und $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ eine Abbildung. Wir sagen, dass $X \cup_f D^n$ (oder ein dazu homöomorpher Raum) durch Ankleben (oder Anheften) einer n-Zelle mittels f entstanden sei. Man schreibt auch laxerweise $X \cup_f e^n$ statt $X \cup_f D^n$.

Bemerkung 8.13. Sei $p : X \cup D^n \to X \cup_f D^n$ die kanonische Projektion. Dann ist $p|_{e^n} : e^n \to p(e^n)$ ein Homöomorphismus. Dies erklärt, warum man vom Anheften/Ankleben einer n-Zelle spricht.

Beispiele 8.14.

(i) Sei $X = D^n$ und $f : \mathbb{S}^{n-1} \to D^n$ die kanonische Inklusionsabbildung (in einen zweiten n-Ball). Dann ist $X \cup_f D^n$ eine n-dimensionale Sphäre.

(ii) Sei $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, $A := \{(x, y) \in X : x = 0 \vee x = 1\}$, $Y := [0, 1]$. Sei $f : A \to Y$ definiert durch $f(0, y) := y$ und $f(1, y) := 1 - y$. Dann ist $M := Y \cup_f X$ homöomorph zu dem Möbiusband.

Der Rand $\partial M = M \setminus \dot{M}$ des Möbiusbandes ist homöomorph zu $\mathbb{S}^1$. Somit lässt sich an M eine 2-Zelle mittels einer Abbildung $g : \mathbb{S}^1 \to \partial M$ ankleben. Wir können für g einen Homöomorphismus wählen. Wir erhalten einen neuen Raum. (Dieser ist homöomorph zu $\mathbb{P}^2$.)

Wir können auch mehrere Zellen gleichzeitig ankleben.

Definition 8.15. Seien $D^n \times \{i\}$, $i \in I$, n-Bälle und $f_i : \mathbb{S}^{n-1} \times \{i\} \to X$ stetige Abbildungen der dazugehörigen $(n-1)$-Sphären in einen topologischen Raum X. $\mathbb{S}_I^{n-1} = \bigcup\limits_{i \in I} \left(\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}\right)$ ist ein Unterraum von $D_I^n := \bigcup\limits_{i \in I} (D^n \times \{i\})$. Wir erhalten eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}_I^{n-1} \to X$ durch die Definition $f(x, i) := f_i(x)$. Man sagt, dass $X' := X \cup_f D_I^n$ durch Ankleben der n-Zellen $e^n \times \{i\}$, $i \in I$, an X entstanden sei.

Den folgenden Satz benutzt man, wenn man Abbildungen von einem Raum betrachten will, der aus Zellen zusammengesetzt ist.

Satz 8.16. *Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Mengen eines topologischen Raumes und*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Sei Y ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für alle i die Restriktionen $f|_{A_i}$ stetig sind.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Gilt nach Satz 4.8.

„$\Longleftarrow$“: Sei B eine abgeschlossene Teilmenge von Y. Wir wollen nachweisen, dass $f^{-1}(B)$ in X abgeschlossen ist. Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(B) \cap X = f^{-1}(B) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \left(f^{-1}(B) \cap A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (f|_{A_i})^{-1}(B) \end{aligned}$$

Da $f|_{A_i}$ stetig ist, ist $(f|_{A_i})^{-1}(B)$ in A_i abgeschlossen. Da A_i selber abgeschlossen ist, ist $(f|_{A_i})^{-1}(B)$ auch in X abgeschlossen. Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen. Also ist $f^{-1}(B)$ in X abgeschlossen. $\square$

CW-Komplexe wurden von J. H. C. Whitehead eingeführt. Sie werden induktiv definiert. (CW steht für “closure-finite weak topology”.)

Definition 8.17 (CW-Komplex)**.** Ein nulldimensionaler CW-Komplex ist eine Menge von Punkten, die mit der diskreten Topologie versehen ist.

Ein n-dimensionaler CW-Komplex ist ein Raum der Form $X \cup_f e_I^n$, wobei f stetig, X ein k-dimensionaler CW-Komplex mit $k < n$ und $e_I^n = \bigcup\limits_{i \in I} (e_i^n \times \{i\})$ die topologische Summe von n-Zellen mit $n \ge 1$ ist.

Beispiele 8.18.

(i) $\mathbb{S}^2$ ist homöomorph zu einem zweidimensionalen CW-Komplex. Man klebt zunächst eine 1-Zelle e^1 an einen Punkt und erhält einen zu $\mathbb{S}^1$ homöomorphen Raum. Durch Ankleben von zwei 2-Zellen e_1^2 und e_2^2 an den entstandenen Raum erhält man einen zu $\mathbb{S}^2$ homöomorphen Raum.

(ii) Man erhält auch einen zu einer $\mathbb{S}^2$ homöomorphen CW-Komplex, indem man eine 2-Zelle an einen Punkt klebt.

(iii) Klebt man eine n-Zelle an einen Punkt, so erhält man einen n-dimensionalen CW-Komplex homöomorph zu $\mathbb{S}^n$.

Literatur

1. Claus Gerhardt, *Analysis I*, International Press, 2004.
2. Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/`.
3. James Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.
4. Oliver Schnürer, *Topologie*, `http://www.math.uni-konstanz.de/~schnuere/`
5. Boto von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Hochschultext.

Matthias Makowski, Universität Konstanz, Universitätsstrasse 10, 78464 Konstanz, Germany

E-mail address: `Matthias.Makowski@uni-konstanz.de`