Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2012/2013
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (6 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, d. h. es gilt $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \eta \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d\lambda = 1$ und $\eta \geq 0$. Wir definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die zugehörige Diracfolge $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n} \eta \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir setzen f durch Null auf das Komplement von Ω fort und definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy$. Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ eine Nullfolge und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\|f_{\varepsilon_n} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $n \to \infty$.
(ii) Sei $k \in \mathbb{N}_+$ und $1 \leq p < \infty$. Sei in dieser Teilaufgabe f noch zusätzlich von der Klasse $W^{k,p}(\Omega)$. Sei $x \in \Omega$. Falls $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ gilt, dann ist $D^\alpha f_\varepsilon(x) = (D^\alpha f)_\varepsilon(x)$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$.
Sei $\Omega' \Subset \Omega$ offen, dann gilt $\|f_{\varepsilon_n} - f\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0$ für $n \to \infty$.
(iii) Gelte nun $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)
Sei $H \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Für $u \in C^2((0,1)) \cap C^1([0,1])$ mit $u(0) = H^{-1}$ und $u'(0) = 0$ definieren wir das Funktional

$$\mathbb{H}[u] := \int_0^1 \left(\sqrt{1 + (u'(x))^2} + H u(x) \right) dx.$$

Nehme an, $u \in C^2((0,1)) \cap C^1([0,1])$ sei ein Minimum des Funktionals. Leite die Differentialgleichung her, welche u erfüllt und zeige, dass der Graph von u,

$$\operatorname{graph} u := \{(x, u(x)) : x \in (0,1)\},$$

einen Kreisbogen mit Radius $|H|^{-1}$ darstellt.

Aufgabe 1.3. (6 Punkte)
Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, dass u genau dann gleichmäßig Lipschitz stetig ist, wenn $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ gilt.
Hinweis: Wenn u gleichmäßig Lipschitz stetig ist, so approximiere die schwachen partiellen Ableitungen von u mittels Differenzenquotienten und verwende die schwache Kompaktheit der Einheitskugel im Hilberträum $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#VAR`
Abgabe: Bis Montag, 29.10.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.