

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG VARIATIONSRECHNUNG

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (12 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt (mit $\partial\Omega \in C^1$). Sei $q \in (1, \infty)$. Sei $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, nach unten beschränkte Funktion. Wir nehmen weiterhin an, dass die Abbildung

$$f^x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto f(p, x),$$

für alle $x \in \Omega$ konvex ist. Wir definieren das Funktional

$$I : W_0^{1,q}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$u \mapsto \int_{\Omega} f(Du(x), x) \, dx.$$

- (i) Zeige, dass für alle $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$

$$f^x(p_1) \geq f^x(p_2) + \langle Df^x(p_2), p_1 - p_2 \rangle$$

gilt.

- (ii) Zeige, dass I schwach unterhalbstetig ist.

- (iii) Wir nehmen für diese Teilaufgabe an, dass es Konstanten $a > 0$, $b \geq 0$ mit

$$f(p, x) \geq a|p|^q - b$$

für alle $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ gibt. Zeige, dass es einen Minimierer $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ von $I[\cdot]$ gibt.

- (iv) Wir nehmen für diese Teilaufgabe an, dass ein $\lambda > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \Omega$ und alle $p, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$D^2 f^x(p) \langle \xi, \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2$$

gilt, d. h. f^x ist gleichmäßig konvex für alle $x \in \Omega$. Zeige, dass es höchstens einen Minimierer $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ von $I[\cdot]$ gibt.

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Definiere

$$I : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Nehme an, dass $\delta I[u] \langle \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt. Zeige, dass u ein Minimum des Funktionals ist, d. h. für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt $I[u] \leq I[u + v]$.

Webseite: <http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#VAR>

Abgabe: Bis Mittwoch, 07.11.2012, 13.25 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.