

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG VARIATIONSRECHNUNG

Blatt 3

Aufgabe 3.1. (4 Punkte)

Sei V ein normierter Raum. Sei $\Omega \subset V$ eine konvexe Teilmenge von V . Sei $F : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein konvexes, unterhalbstetiges Funktional. Zeige, dass F schwach unterhalbstetig ist.

Aufgabe 3.2. (4 Punkte + *zusätzlich 4 Punkte*)

Sei $1 < p < \infty$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren das Funktional

$$F : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{\Omega} |f|^p(x) d\lambda(x).$$

Zeige, dass $F \in C^1(L^p(\Omega))$ gilt und dass für die partielle Ableitung an der Stelle $u \in L^p(\Omega)$ in die Richtung $v \in L^p(\Omega)$

$$DF(u)v = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv$$

gilt.

Zusatz: Sei $p > 2$. Zeige, dass $F \in C^2(L^p(\Omega))$ gilt und dass für die partielle Ableitung an der Stelle $u \in L^p(\Omega)$ in die Richtungen $v, w \in L^p(\Omega)$

$$D^2F(u)\langle v, w \rangle = p(p-1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} vw$$

gilt.

Aufgabe 3.3. (4 Punkte)

- (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei $H \in \mathbb{R}$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap H^{1,1}(\Omega)$. Nehme an, dass die erste Variation des Funktional

$$F_1(u) = \int_{\Omega} [(1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}} + Hu] dx$$

an der Stelle u für alle Variationen $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in H^{1,1}(\Omega)$ mit $u(\cdot, t) - u(\cdot, 0) \in C_c^2(\Omega)$ verschwindet. Berechne die Euler-Lagrange Gleichung von F_1 .

- (ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel. Sei $u \in H^{1,2}(B_1(0), \mathbb{S}^{n-1}) \cap C^2(B_1(0), \mathbb{R}^n)$. Nehme an, dass die erste Variation des Funktional

$$F_2(u) = \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} |Du|^2$$

an der Stelle u für alle Variationen $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in H^{1,2}(B_1(0), \mathbb{S}^{n-1})$ mit $u(\cdot, t) - u(\cdot, 0) \in H_0^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(B_1(0), \mathbb{R}^n)$ verschwindet. Berechne die Euler-Lagrange Gleichung von F_2 .

Aufgabe 3.4. (4 + *zusätzlich 2* Punkte)

Sei $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir definieren die Länge der Kurve $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

und die Energie der Kurve durch

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Sei $X_1 := \mathbb{R}^n$ und sei $X_2 := \mathbb{S}^{n-1}$. Für $i \in \{1, 2\}$ und $p, q \in X_i$ definieren wir $C_{pq}^i := \{\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q, \gamma(I) \subset X_i\}$.

- (i) Berechne für $i \in \{1, 2\}$ die Euler-Lagrange Gleichung des Funktional E in der Klasse $C_{pq}^i \cap C^2((a, b), \mathbb{R}^n)$.
- (ii) Sei $i \in \{1, 2\}$. Zeige, dass $\gamma_0 \in C_{pq}^i$ genau dann das Funktional E in C_{pq}^i minimiert, wenn γ_0 das Funktional L in C_{pq}^i minimiert und eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass $\|\dot{\gamma}(t)\| = c$ für alle $t \in I$ gilt.
- (iii) Berechne einen Minimierer des Längenfunktional in der Klasse C_{pq}^1 .
- (iv) Sei $n = 3$. Sei $\alpha \in (0, \pi)$. Seien $p = (1, 0, 0)^t$, $q = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)^t$, $a = 0$ und $b = \alpha$. Gib' eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung des Funktional E in der Klasse $C_{pq}^2 \cap C^2((a, b), \mathbb{R}^n)$ an.
Zusatz: Zeige, dass die Lösung auch ein Minimierer des Längenfunktional in der Klasse C_{pq}^2 ist.

Webseite: <http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#VAR>

Abgabe: Bis Mittwoch, 14.11.2012, 13.25 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.