Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2012/2013
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung

Blatt 4

Aufgabe 4.1. (8 Punkte)
Sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge eines Hilbertraums H.

(i) Sei $\pi : H \to K$ die Abbildung, die $f \in H$ den Punkt $u \in K$ mit
$$\|f - u\| = \inf_{v \in K} \|f - v\|$$
zuordnet. Zeige, dass für $f \in H$ genau dann $u = \pi(f)$ gilt, wenn $u \in K$ und
$$\langle f - u, v - u\rangle \le 0 \quad \forall\, v \in K$$
gilt.

(ii) Sei $a \in L_2(H, \mathbb{R})$ eine stetige, symmetrische Bilinearform, die gleichmäßig positiv ist, d. h. es gibt ein $\mu > 0$ mit $a(v, v) \ge \mu\|v\|^2$ für alle $v \in H$. Sei $f \in H$. Zeige, dass es ein $u \in K$ gibt, welches die folgende Variationsungleichung erfüllt:
$$\forall\, v \in K : a(u, v - u) \ge \langle f, v - u\rangle.$$

(iii) Sei u die Lösung der Variationsungleichung aus Teilaufgabe (ii). Zeige, dass u der eindeutige Minimierer des Funktionals
$$J : K \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v\rangle$$
ist.

(iv) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Sei $g \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $g \le 0$ auf $\partial\Omega$, d. h. wir fordern $\max(0, g) \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Wir definieren das Energiefunktional
$$J : K \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fu\, dx,$$
wobei
$$K := \{v \in W^{1,2}_0(\Omega) : v(x) \ge g(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega\}$$
sei. Zeige, dass es eine Lösung $u \in K$ des Hindernisproblems
$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$$
gibt.

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge. Seien für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ Funktionen $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ gegeben. Nehme an, dass es Konstanten $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$ gibt, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und fast alle $x \in \Omega$
$$\lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2$$
gilt. Sei $\varphi \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine schwache Lösung des elliptischen Problems
$$\begin{cases} -(a^{ij}u_j)_i = 0, & \text{in } \Omega,\\ u = \varphi, & \text{auf } \partial\Omega.\end{cases}$$
Zeige, dass
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$$
gilt.
Hinweis: Zeige, dass für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ auch $u^+ := \max\{u, 0\} \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt und bestimme die schwache Ableitung von u^+.

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel. Sei $u \in H^{1,2}(B_1(0), \mathbb{S}^{n-1}) \cap C^2(B_1(0), \mathbb{R}^n)$. Zeige, dass u genau dann eine harmonische Abbildung ist, wenn u die Gleichungen

$$\operatorname{div}\left(u^i Du^j - u^j Du^i\right) = 0$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ erfüllt.
Anleitung: Zunächst nehmen wir an u sei harmonisch. Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Sei $A = (a_{kl}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix, deren Einträge $a_{ij} = 1, a_{ji} = -1$ sind und deren sonstige Einträge verschwinden. Sei $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$ gegeben. Betrachte die Variation $t \mapsto \frac{u + t\varphi Au}{|u + t\varphi Au|}$.
Nehmen wir nun an, dass u die oben gegebenen Gleichungen erfüllt. Sei nun $v \in C_c^\infty(B_1(0), \mathbb{R}^n)$. Für $1 \leq i < j \leq n$ definieren wir $a_{ij} := u_i v_j - u_j v_i$. Zeige nun, dass

$$\langle Du, Dv \rangle - |Du|^2 \langle u, v \rangle = \sum_{i<j} \langle Da_{ij}, u^i Du^j - u^j Du^i \rangle$$

gilt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#VAR`
Abgabe: Bis Mittwoch, 21.11.2012, 13.25 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.