Oliver Schnürer,
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (12 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und konvex. Sei $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $\sup\limits_{\Omega} \psi > 0$ und $\psi(x) < 0$ für $x \in \partial\Omega$. Wir definieren

$$K := \{v \in W_0^{1,\infty}(\Omega) : v \geq \psi \text{ in } \Omega\}.$$

Sei

$$\mathcal{F} : K \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \int_\Omega F(Dv)dx,$$

wobei $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist, so dass $a = (a^i) := (D^i F) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein lokal koerzives Vektorfeld ist, d. h. für alle $C \Subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Konstante $\mu = \mu(C) > 0$ so dass für alle $x, y \in C$

$$\langle a(x) - a(y), x - y\rangle \geq \mu|x - y|^2$$

gilt.

a) Nehme an, $u \in K$ erfülle $\mathcal{F}[u] = \inf\limits_{v \in K} \mathcal{F}[v]$. Zeige, dass u die Variationsungleichung

$$\int_\Omega \langle a(Du), D(v - u)\rangle dx \geq 0 \quad \forall\, v \in K$$

erfüllt.

b) Nehme an, dass $u \in K \cap C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{2,2}(\Omega)$ die oben gegebene Variationsungleichung erfüllt. Zeige, dass

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|D\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

gilt.
Anleitung:
(i) Sei $I := \{x \in \Omega : (u - \psi)(x) = 0\}$. Zeige zunächst, dass

$$\sup_{x \in \Omega \setminus I} |Du(x)| \leq \sup_{x \in \partial(\Omega \setminus I)} |Du(x)|$$

gilt.
(ii) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Zeige, dass es eine affine Funktion π mit $\pi(x_0) = 0$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$ auch $\pi(x) \geq \max\{\psi(x), 0\}$ und $|D\pi(x)| \leq \sup\limits_{y \in \Omega} |D\psi(y)|$ gibt.
(iii) Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und π die eben konstruierte Funktion. Zeige, dass $0 \leq u(x) \leq \pi(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Folgere hieraus, dass für einen äußeren Normalenvektor ν von $\partial\Omega$ an x_0

$$0 \leq -\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq \|D\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

gilt.

c) Zeige, dass $a = (a^i) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $a^i(p) = \frac{p^i}{\sqrt{1+|p|^2}}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein lokal koerzives Vektorfeld ist.

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $U \in C^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion, welche die BSB-Bedingung für Ω erfüllt. Nehme an, dass sich $U_{|\partial\Omega}$ nicht zu einer affinen Funktion auf den $\mathbb{R}^n$ fortsetzen lässt. Zeige, dass Ω konvex ist.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#VAR`
Abgabe: Bis Mittwoch, 28.11.2012, 13.25 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.