

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG VARIATIONSRECHNUNG

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,2}(B_1(0), \mathbb{S}^{n-1})$ harmonische Abbildungen. Nehme an, dass es ein $u \in W^{1,2}(B_1(0), \mathbb{S}^{n-1})$ mit $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$ gibt. Zeige, dass u harmonisch ist.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$.

- (i) Zeige, dass es eine Funktion $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $F > 0$ in Ω , $\partial\Omega = F^{-1}(\{0\})$ und $DF \neq 0$ auf $\partial\Omega$ gibt. F heisst definierende Funktion für Ω .
- (ii) Sei F eine Funktion wie in Teilaufgabe (i). Zeige, dass es zu $m \in \mathbb{N}$ glatte Gebiete $\Omega_m \subset \Omega$ gibt, welche sich wie in Teilaufgabe (i) durch definierende Funktionen $F_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ beschreiben lassen, so dass

$$\left\{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m}\right\} \subset \Omega_m$$

gilt. Zeige weiterhin, dass die Funktionen F_m so gewählt werden können, dass es eine nur von n abhängige Konstante $c > 0$ mit

$$\|F_m\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\|F\|_{C^2(\mathbb{R}^n)}$$

gibt.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ mit $Du = 0$ fast überall. Zeige, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $u = c$ fast überall gibt.

Aufgabe 6.4. (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit $\partial\Omega \in C^2$. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so dass sich $\partial\Omega \cap V$ als Graph einer C^2 -Funktion $\omega : B_r^{n-1}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $x_0 \in \partial\Omega$ darstellen lässt. Zeige, dass für $x \in B_r^{n-1}(x_0)$ die Hauptkrümmungen von $\partial\Omega$ an der Stelle $(x, \omega(x))$ den Eigenwerten der Matrix $A = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ bezüglich $(\delta_{ji}) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ mit

$$a_{ji} := \left(\frac{\omega_{ji}}{(1 + |D\omega|^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega_{ki} \delta^{kl} \omega_l \omega_j}{(1 + |D\omega|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) (x)$$

für $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ entsprechen.

Webseite: <http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#VAR>

Abgabe: Bis Mittwoch, 05.12.2012, 13.25 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.