

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG VARIATIONSRECHNUNG

Blatt 7

**Aufgabe 7.1.** (4 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^2$  und nehme an, dass die Hauptkrümmungen von  $\partial\Omega$  an jedem Punkte positiv sind. Sei  $U \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Zeige, dass  $U$  die BSB-Bedingung für  $\Omega$  erfüllt.

**Aufgabe 7.2.** (6 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^2$ . Zeige die folgenden Aussagen:

- (i)  $\Omega$  ist genau dann konvex, wenn die Hauptkrümmungen an jedem Punkt  $x \in \partial\Omega$  nicht-negativ sind.
- (ii) Zeige, dass  $\Omega$  genau dann konvex ist, wenn  $\Omega$  für alle  $x \in \partial\Omega$  auf einer Seite der Tangentialebene in  $x$  von  $\partial\Omega$  liegt.
- (iii) Es gibt ein  $x_0 \in \partial\Omega$ , so dass alle Hauptkrümmungen in  $x_0$  von  $\partial\Omega$  strikt positiv sind.

**Aufgabe 7.3.** (6 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  eine schwach differenzierbare Funktion.

- (i) Sei  $f \in C^1(\mathbb{R})$  mit  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Zeige, dass  $f \circ u$  eine schwach differenzierbare Funktion mit

$$D(f \circ u) = f'(u)Du$$

ist. Zeige ausserdem, dass  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  auch  $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$  impliziert.

- (ii) Zeige, dass  $u^+ := \max\{u, 0\}$  schwach differenzierbar ist und dass

$$Du^+ = \begin{cases} Du & u > 0, \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

fast überall gilt.

- (iii) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  eine endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Sei  $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus I)$  mit  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Zeige, dass  $f \circ u$  eine schwach differenzierbare Funktion mit

$$D(f \circ u) = \begin{cases} f'(u)Du & u \notin I, \\ 0 & u \in I \end{cases}$$

ist.

**Webseite:** <http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#VAR>

**Abgabe:** Bis Mittwoch, 12.12.2012, 13.25 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.