Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Fin. Ökon. Thilo Moseler

19. Januar 2009

Analysis III
10. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 28. 1. 2009 bis 30. 1. 2009 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 26. 1. 2009 um 10.00 Uhr in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 10.1 Es sei Ω eine endliche, nicht leere Menge. Für jede Teilmenge $A \subset \Omega$ sei $\zeta(A) =$ Anzahl der Elemente von A. Zeigen Sie:

(i) ζ ist ein Maß auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

(ii) Mit

$$\varepsilon_\omega(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

ist

$$\zeta = \sum_{\omega \in \Omega} \varepsilon_\omega.$$

(iii) Jedes Maß μ auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ hat die Form

$$\mu = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega \varepsilon_\omega \text{ mit } \alpha_\omega := \mu(\{\omega\}).$$

Aufgabe 10.2 Zeigen Sie für einen endlichen Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mu(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1}\mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{R}$.

Aufgabe 10.3 Es sei Ω eine nicht leere Menge, $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. Weiter sei

$$\widetilde{\mathfrak{R}} := \{A \in \mathfrak{P}(\Omega) : A \cap R \in \mathfrak{R} \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}\}$$

und

$$\widetilde{\mu}(A) = \sup\{\mu(R) : R \subset A, R \in \mathfrak{R}\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Das Mengensystem $\widetilde{\mathfrak{R}}$ ist eine Algebra in Ω mit $\mathfrak{R} \subset \widetilde{\mathfrak{R}}$.

(ii) Die Abbildung $\widetilde{\mu}$ ist ein Prämaß auf $\widetilde{\mathfrak{R}}$, welches μ fortsetzt.

Aufgabe 10.4 Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Prämaßen auf einem Ring $\mathfrak{R}$ sei isoton, das heißt $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Dann wird durch

$$\mu(A) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A), A \in \mathfrak{R},$$

ein Prämaß μ auf $\mathfrak{R}$ definiert.