



## 6. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 26. 11. 2007 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 22. 11. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

**(6. 1)** Sei  $E$  normierter Vektorraum und  $T: E \rightarrow F$  ein NVR-Isomorphismus. Zeigen Sie:  $E$  ist genau dann reflexiv, wenn  $F$  reflexiv ist.

**(6. 2)** Zeigen Sie:

(a) Für einen Hilbertraum  $H$  gelten die *Polarisierungsformeln*:

$$4 \cdot \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2, \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (x, y \in H)$$
$$4 \cdot \langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^3 i^n \|x + i^n y\|^2, \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad (x, y \in H).$$

(b) Ist  $(X, \|\cdot\|)$  ein komplexer NVR, der die Parallelogrammgleichung erfüllt, so wird durch die (zweite) Polarisierungsformel ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definiert, dessen induzierte Norm gerade  $\|\cdot\|$  ist.

**(6. 3)** Sei  $F$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des Hilbertraum  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . und sei  $x_0 \in H$ . Zeigen Sie: Für  $x \in F$  ist äquivalent:

- (i)  $\|x_0 - x\| = d(x_0, F)$ ,
- (ii)  $\forall y \in F: \operatorname{Re} \langle x_0 - x, y - x \rangle \leq 0$ .