Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
Simon Müller
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Modelltheorie

Blatt 1

Abgabe: Bis Mittwoch, 25. April 2018, 15:15 Uhr, in den Briefkasten Nummer 16. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 1.1 *(3 Punkte)*

Gegeben sei die Sprache $\mathcal{L} = \langle f, g, c\rangle$, wobei f und g Funktionszeichen der Stellenzahl 1 bzw. 2 seien und c eine Konstante. Entscheiden Sie, ob die folgenden Zeichenreihen $\mathcal{L}$-Terme sind:

(i) 0
(ii) $g(x, y)$
(iii) $f(f(f(c)))$
(iv) $f(v_1) = g(v_1, c)$
(v) $f(g(g(f(g(v_1, v_2))), c))$
(vi) $f(g(v_0, f(g(v_2, c))))$

Aufgabe 1.2 *(4 Punkte)*

(a) Gegeben sei die Sprache $\mathcal{L} = \langle +, \cdot, <, 0, 1\rangle$ mit der üblichen Interpretation der Symbole (z.B. über $\mathbb{R}$). Entscheiden Sie, ob die folgenden Zeichenreihen $\mathcal{L}$-Formeln sind:
   (i) $\forall x \exists y \forall z (y < x \wedge x < 0) \to y < 0$
   (ii) $\neg x = 0 \to 0 < x \cdot x \, \forall x$
   (iii) $\neg x = 0 \to \forall x \, 0 < x \cdot x$
   (iv) $(\exists x \; x = 1 \vee x + x = 1) \wedge y = 0$
   (v) $\bigvee_{i=0}^{\infty} x = v_i$, d.h. $x = v_0 \vee x = v_1 \vee \ldots$
   (vi) $0 < 2$

   Bemerkung: Nach Konvention werden äußere Klammern bei Formeln weggelassen. Zudem erlauben wir die Schreibweise $x < y$ anstelle von $<(x, y)$ und entsprechend $x \cdot y$ anstelle von $\cdot(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie für jede Formel aus Aufgabenteil (b) deren freie Variablen.

Aufgabe 1.3 *(5 Punkte)*

Gegeben sei die Sprache $\mathcal{L} = \langle P, G, L\rangle$, wobei P und G einstellige Relationszeichen sind und L ein zweistelliges Relationszeichen ist. Wir interpretieren diese wie folgt:

Px	„x ist ein Punkt“
Gx	„x ist eine Gerade“
Lxy	„x liegt auf y“

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in der Sprache $\mathcal{L}$:

(i) Auf jeder Geraden liegt ein Punkt, aber nicht jeder Punkt liegt auf einer Geraden.
(ii) Schneiden sich zwei Geraden in zwei verschiedenen Punkten, so sind die Geraden identisch.
(iii) Zu jedem Punkt, der auf einer Geraden liegt, gibt es einen vom ersten verschiedenen Punkt, der ebenfalls auf dieser Geraden liegt.
(iv) Es gibt keine Gerade, auf der genau zwei Punkte liegen.
(v) Zwei verschiedene Geraden haben entweder keinen Schnittpunkt oder mindestens zwei Schnittpunkte.

Hinweis: Sie können zunächst Teilaussagen separat formalisieren und diese mit einem Namen abkürzen.

Aufgabe 1.4 *(4 Punkte)*

Finden Sie für die folgenden mathematischen Theorien in der Sprache $\mathcal{L}$ mit den üblichen Interpretationen eine Axiomatisierung, das heißt eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln, die genau von den Vertretern dieser Theorien erfüllt wird. Den Begriff „erfüllt“ sollen Sie hierbei intuitiv auffassen.

(a) Körper der Charakteristik 0 in der Sprache $\mathcal{L} = \langle +, \cdot, 0, 1 \rangle$.

(b) Dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte in der Sprache $\mathcal{L} = \langle < \rangle$.

Hinweis: Eine lineare Ordnung heißt dicht, wenn zu je zwei Elementen ein weiteres Element existiert, das echt zwischen diesen beiden liegt.
Sie hat keine Endpunkte, wenn es kein kleinstes und kein größtes Element gibt.