Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
Simon Müller
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Modelltheorie

Blatt 2

Abgabe: Bis Mittwoch, 9. Mai 2018, 15:15 Uhr, in den Briefkasten Nummer 16. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 2.1 (*3 Punkte*)
Sei R ein zweistelliges Relationszeichen, c eine Konstante und $\mathcal{L} = \{R, c\}$. Finden Sie für jede der folgenden $\mathcal{L}$-Aussagen eine $\mathcal{L}$-Struktur, welche sie erfüllt, und eine, welche sie nicht erfüllt:

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \vee Ryz) \to Rxz), \quad \forall x \exists y(Rxy \wedge Ryc), \quad \forall x((x = c \vee (Rxc \wedge \neg Rcx)) \vee (Rcx \wedge \neg Rxc))$$

Aufgabe 2.2 (*4 Punkte*)
In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass Isomorphie von Strukturen eine Äquivalenzrelation definiert. Sei hierzu $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ und $\mathcal{S}$ drei $\mathcal{L}$-Strukturen.

(1) Zunächst ein Beispiel: Sei $\mathcal{L} = \langle +, \cdot, 0, 1 \rangle$ und R, S zwei kommutative Ringe mit 1 mit der üblichen Interpretation der Symbole aus $\mathcal{L}$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $\sigma : R \to S$ genau dann ein Ring-Isomorphismus ist, wenn σ ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus ist.
(2) Zum allgemeinen Fall: Seien $f : M \to N$ und $g : N \to S$ zwei $\mathcal{L}$-Isomorphismen. Zeigen Sie, dass $g \circ f : M \to S$ ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus ist.
(3) Sei $f : M \to N$ ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $f^{-1} : N \to M$ ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus ist.
(4) Folgern Sie, dass „es gibt einen $\mathcal{L}$-Isomorphismus“ in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen ist.

Aufgabe 2.3 (*5 Punkte*)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen per Induktion über den Formelaufbau, d.h. zeigen Sie sie zunächst für atomare Formeln und anschließend, dass wenn zwei Formeln φ und ψ sie erfüllen, dann auch $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ und entsprechend für die übrigen Junktoren und die beiden Quantoren.

(1) Zum Einstieg: In einer Formel stimmt die Anzahl der offenen Klammern „(” mit der Anzahl der geschlossenen Klammern „)” überein.
(2) Das Isomorphie-Lemma aus der Vorlesung: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen und $\rho : A \to B$ ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus, so gilt für alle $\mathcal{L}$-Formeln φ mit $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$:
$$\mathcal{A} \models \varphi(x_1/\underline{a_1}, \ldots, x_n/\underline{a_n}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(x_1/\underline{\rho(a_1)}, \ldots, x_n/\underline{\rho(a_n)}).$$

Bemerkung: Es genügt im Induktionsschritt etwa die beiden Junktoren $\neg$ und $\wedge$ sowie den Allquantor $\forall$ zu betrachten. Wieso?

Aufgabe 2.4 (*4 Punkte*)
Gegeben sei jeweils eine mathematische Aussage S und eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$. Finden Sie eine $\mathcal{L}$-Aussage σ, so dass S äquivalent ist zu $\mathcal{M} \models \sigma$. Der Einfachheit halber identifizieren wir hier die Symbole aus $\mathcal{L}$ mit ihrer Interpretation in $\mathcal{M}$.

(1) *Γ ist der Graph einer surjektiven Abbildung $M \to M$* in der Sprache $\mathcal{L} = \langle \Gamma \rangle$, wobei Γ ein zweistelliges Relationszeichen sei und M eine beliebige Menge.
(2) *Das Polynom $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in M[x]$ ist irreduzibel* in der Sprache $\mathcal{L} = \langle +, \cdot, 0, 1, a_0, \ldots, a_3 \rangle$, wobei die a_i Konstanten sind und M ein Körper.
(3) *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Abbildung* in der Sprache $\mathcal{L} = \langle f, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ und $M = \mathbb{R}$.

Hinweis: Sie können in (3) voraussetzen, dass es sich bei f um eine Abbildung handelt.