Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
Simon Müller
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Modelltheorie

Blatt 3

Abgabe: Bis Mittwoch, 31. Mai 2018, 15:15 Uhr, in den Briefkasten Nummer 16. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 3.1 *(5 Punkte)*

Erinnerung: In der Vorlesung wurde aus dem Isomorphie-Lemma gefolgert, dass isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen elementar äquivalent sind.

(1) Zeigen Sie: Sind $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen mit $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ und ist M endlich, so gilt $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Hinweis: Per Widerspruchsbeweis. Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Zeigen Sie, dass zu jeder Bijektion $f : M \to N$ eine (negierte) atomare Formel $\varphi_f(x_1, \ldots, x_n)$ existiert, so dass

$$\mathcal{M} \models \varphi_f(x_1/\underline{a_1}, \ldots, x_n/\underline{a_n}) \text{ und } \mathcal{N} \models \neg\varphi_f(x_1/\underline{f(a_1)}, \ldots, x_n/\underline{f(a_n)}).$$

(2) Finden Sie ein Gegenbeispiel, falls M nicht endlich ist.

Aufgabe 3.2 *(5 Punkte)*

Sei G eine multiplikative einfache unendliche Gruppe. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass G für jede unendliche Kardinalzahl $\kappa \leq |G|$ eine einfache Untergruppe der Kardinalität κ hat.

Gegeben sei die Sprache $\mathcal{L} = \langle \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$, wobei wir $^{-1}$ als einstelliges Funktionszeichen auffassen. Wir betrachten $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ als $\mathcal{L}$-Struktur.

(1) Sei $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{L}$-Substruktur von $\mathcal{G}$. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist.

(2) Sei H eine Untergruppe von G und $a \in H$. Zeigen Sie, dass

$$N_H(a) := \left\{ \prod_{i=1}^{n} g_i a^{e_i} g_i^{-1} : n \in \mathbb{N}, e_i \in \{-1, 1\}, g_i \in H \right\}$$

der kleinste Normalteiler von H ist, der a enthält.

(3) Sei nun $\mathcal{H}$ eine elementare Substruktur von $\mathcal{G}$. Zeigen Sie, dass $N_H(a) = H$ für alle $a \in H \backslash \{1\}$.

(4) Beweisen Sie die Behauptung aus der Aufgabenstellung.

Bemerkung: Versuchen Sie (4) zu lösen, selbst wenn Sie eine der vorherigen Aufgabenteile nicht beweisen können. In dem Fall nehmen Sie die jeweilige Behauptung einfach an.

Aufgabe 3.3 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass das Axiomensystem der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist.

Aufgabe 3.4 *(2 Punkte)*

Zeigen Sie anhand eines geeigneten (Gegen-)Beispiels, dass das Axiomensystem der algebraisch abgeschlossenen Körper nicht vollständig ist.