Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
Simon Müller
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Modelltheorie

Blatt 4

Abgabe: Bis Mittwoch, 14. Juni 2018, 15:15 Uhr, in den Briefkasten Nummer 16. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 4.1 (*4 Punkte*)

Gegeben sei eine Sprache $\mathcal{L}$ und drei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie mittels eines geeigneten Gegenbeispiels:

(1) Aus $\mathcal{A}, \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.
(2) Aus $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.
(3) Aus $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
(4) Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.
(5) Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Aufgabe 4.2 (*5 Punkte*)

Sei $\mathcal{L} = \langle R \rangle$, wobei R ein binäres Relationszeichen sei. Betrachten Sie die folgende Liste von $\mathcal{L}$-Strukturen, wobei $<$ bzw. $>$ die übliche Ordnungsrelation bezeichne:

$$(\mathbb{N}, <), (\mathbb{N}, >), (\mathbb{Z}, <), (\mathbb{Z}, >), (\mathbb{N}^{>0}, <), (\mathbb{Z} - \{0\}, <), (\mathbb{Q}, <),$$
$$(\mathbb{Q} - \{0\}, <), (\mathbb{Q}^{>0}, <), (\mathbb{R}, <), (\mathbb{R} - \{0\}, <), (\mathbb{R}^+, <), (\mathbb{R} - \mathbb{Q}, <).$$

(1) Geben Sie an, welche dieser Strukturen
  (a) Substrukturen voneinander sind.
  (b) zueinander isomorph sind.
  (c) zueinander elementar äquivalent sind.

  Bemerkung: Sie brauchen ihre Antwort nicht zu beweisen.
(2) Nun streichen wir $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}, <)$ von der Liste. Was ändert sich bei (b), wenn wir überall die 1 als Konstante hinzufügen?

Aufgabe 4.3 (*4 Punkte*)

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(1) Ist $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ endlich axiomatisierbar, so ist auch $\mathrm{Str}_{\mathcal{L}} - \mathrm{Mod}(\Sigma)$ endlich axiomatisierbar.
(2) Ist $\mathrm{Str}_{\mathcal{L}} - \mathrm{Mod}(\Sigma)$ axiomatisierbar, so ist $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ endlich axiomatisierbar.

Hinweis 1: Eine Teilklasse A von $\mathrm{Str}_{\mathcal{L}}$ heißt (endlich) axiomatisierbar, falls eine (endliche) Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen existiert, so dass für alle $\mathcal{M} \in \mathrm{Str}_{\mathcal{L}}$ gilt: $\mathcal{M} \in A$ genau dann wenn $\mathcal{M} \models \Sigma$.
Hinweis 2: Verwenden Sie für (2) das Separationslemma.

Aufgabe 4.4 (*3 Punkte*)

Zeigen Sie mittels einer geeigneten Charakterisierung der Modellvollständigkeit:

(1) Ist $\mathcal{L}$ eine Sprache, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ zwei Mengen von $\mathcal{L}$-Aussagen und ist Σ_1 modellvollständig, so ist auch Σ_2 modellvollständig.
(2) Das Axiomensystem der Körper ist nicht modellvollständig.