Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
Simon Müller
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Modelltheorie

Blatt 5

Abgabe: Bis Mittwoch, 20. Juni 2018, 15:15 Uhr, in den Briefkasten Nummer 16. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 5.1 (*3 Punkte*)

Finden Sie zu jeder der folgenden mathematischen Aussagen eine Formel φ, die diese möglichst genau wiedergibt, sowie eine quantorenfreie Formel ψ mit $\mathrm{Fr}(\psi) \subseteq \mathrm{Fr}(\varphi)$, so dass das Kriterium

$$\Sigma \models \forall x_1, \ldots, x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$$

der Quantorenelimination aus der Vorlesung erfüllt ist.

(a) Die Matrix $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$ ist invertierbar für Σ das Axiomensystem der Körper in der Sprache $\langle +, \cdot, 0, 1 \rangle$.

(b) Das Polynom $v_1X^2 + v_2X + v_3$ hat eine Nullstelle (in der Trägermenge) für $\Sigma = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle)$.

(c) Das Polynom $v_1X^2 + v_2X + v_3$ hat eine Nullstelle (in der Trägermenge) für $\Sigma = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle)$.

Aufgabe 5.2 (*6 Punkte*)

(a) Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $A \subseteq R$. Dann heißt A semialgebraisch, falls A eine endliche boolsche Kombination von Mengen der Form

$$\{x \in R : f_1(x) > 0, \ldots, f_r(x) > 0\}$$

ist für ein $r \in \mathbb{N}$ und $f_i \in R[X]$ für alle i.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(1) A ist definierbar in $\langle R, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$.
(2) A ist semialgebraisch.
(3) A ist eine endliche Vereinigung von Punkten und offenen Intervallen (mit Endpunkten in $R \cup \{\pm\infty\}$) aus R.

Hinweis 1: Ist $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, so heißt eine Teilmenge $A \subseteq M$ definierbar in $\mathcal{M}$, falls eine $\mathcal{L}_M$-Formel $\varphi(x)$ existiert, so dass $A = \{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi(x/\underline{a})\}$.

Hinweis 2: Sie dürfen verwenden, dass Σ_{rcf} Quantorenelimination erlaubt.

(b) Sei $(M, <)$ eine linear geordnete Menge. Eine Struktur $\mathcal{M} = \langle M, <, \ldots \rangle$ heißt o-minimal ("order minimal"), falls jede definierbare Teilmenge von M eine endliche Vereinigung von Punkten und offenen Intervallen (mit Endpunkten in $M \cup \{\pm\infty\}$) aus M ist.
(1) Zeigen Sie, dass $\langle \mathbb{Q}, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ nicht o-minimal ist.
(2) In Teilaufgabe (a) wurde gezeigt, dass $\langle R, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ für jeden reell abgeschlossenen Körper R o-minimal ist. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass diese Eigenschaft durch Hinzufügen von
  (i) Funktionszeichen
  (ii) Relationszeichen
  (iii) Konstanten
zu $\mathcal{L}$ erhalten bleibt.

Aufgabe 5.3 (*3 Punkte*)

Sei $\mathcal{L} = \{<\}$ und φ eine $\mathcal{L}$-Formel der Form $\exists x \forall y \psi$, wobei ψ quantorenfrei sei mit $\mathrm{Fr}(\psi) \subseteq \{x, y\}$.

(a) Zeigen Sie, dass aus $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \varphi$ bereits $\langle \mathbb{N}, < \rangle \models \varphi$ folgt, wobei wir $<$ wie üblich interpretieren.

(b) Gilt die Umkehrung von (a) auch?

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Einbettung.

Aufgabe 5.4 *(4 Punkte)*

Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass

(a) die normierten irreduziblen Polynome $f \in R[X]$ von der Gestalt $f(X) = X - a$ beziehungsweise $f(X) = (X-a)^2 + b^2$ sind mit $a, b \in R$ und $b \neq 0$.

(b) jedes Polynom $f \in R[X]$ den Zwischenwertsatz erfüllt, d.h. aus $f(a)f(b) < 0$ mit $a, b \in R$ folgt bereits, dass f eine Nullstelle zwischen a und b hat.

Hinweis: Verwenden Sie den Fakt aus der Vorlesung, dass R genau dann reell abgeschlossen ist, wenn $R(\sqrt{-1})$ algebraisch abgeschlossen ist. Benutzen Sie nicht, dass Σ_{rcf} Quantorenelimination erlaubt und entsprechend auch nicht Tarskis Transfer.