Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
Simon Müller
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Modelltheorie

Blatt 6

Abgabe: Bis Mittwoch, 4. Juli 2018, 15:15 Uhr, in den Briefkasten Nummer 16. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 6.1 (*3 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ in der Struktur $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ nicht definierbar ist.
(Definition von Definierbarkeit siehe Aufgabe 5.2)

Aufgabe 6.2 (*4 Punkte*)

Folgern Sie aus Hilberts Basissatz und der Modellvollständigkeit von Σ_{acf} Hilberts Nullstellensatz: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist I ein Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $1 \notin I$, dann existiert ein Element $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, so dass $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $f \in I$.

Hinweis: Finden Sie zunächst ein maximales Ideal J von $K[X_1, \ldots, X_n]$ welches alle Erzeuger von I enthält. Betrachten Sie dann den algebraischen Abschluss von $K[X_1, \ldots, X_n]/J$.

Erinnerung(B5): Hilberts Basissatz. Sei K ein Körper. Dann wird jedes Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ von endlich vielen Elementen erzeugt.

Aufgabe 6.3 (*5 Punkte*)

Zeigen Sie mit Hilfe des Endlichkeitssatzes:

(1) Sei T die Theorie von $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$. Dann existiert ein Modell $\mathcal{M}$ von T und ein Element $c \in M$, welches größer ist als jede natürliche Zahl.
Kann für ein solches Modell $\mathcal{M}$ das Element c minimal gewählt werden?

(2) Sei T die Theorie von $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$. Dann existiert ein Modell $\mathcal{M}$ von T und ein Element $\varepsilon \in M$, welches infinitesimal ist, d.h. $0 < \varepsilon < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Für den Beweis des Endlichkeitssatzes werden (Ultra-)Filter eine wichtige Rolle spielen.

Definition: Sei $\emptyset \neq S$ eine Menge. Dann heißt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ **Filter** auf S, falls

(1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,
(2) $U, V \in \mathfrak{F} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{F}$,
(3) $U \in \mathfrak{F}$, $U \subseteq B \subseteq S \Rightarrow B \in \mathfrak{F}$.

Gilt zusätzlich $B \subseteq S \Rightarrow B \in \mathfrak{F}$ oder $S \backslash B \in \mathfrak{F}$, so heißt $\mathfrak{F}$ **Ultrafilter**.

Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf S heißt **Hauptfilter**, falls ein $s \in S$ existiert mit $\mathfrak{F} = \{U \subseteq S : s \in U\}$.

Aufgabe 6.4 (*4 Punkte*)

(1) Sei S eine nichtleere Menge und $\mathfrak{F}$ ein Filter auf S. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:
  (i) $\mathfrak{F}$ ist ein Ultrafilter.
  (ii) Für alle $U, V \subseteq S$ folgt aus $U \cup V \in \mathfrak{F}$ bereits $U \in \mathfrak{F}$ oder $V \in \mathfrak{F}$.

(2) Sei nun S eine unendliche Menge und $\mathfrak{F}_0 := \{U \subseteq S : S \backslash U \text{ ist endlich}\}$. Zeigen Sie:
  (i) $\mathfrak{F}_0$ ist ein Filter auf S, aber kein Ultrafilter.
  (ii) Ein Ultrafilter auf S ist genau dann ein Hauptfilter, wenn er nicht $\mathfrak{F}_0$ enthält.
  (iii) Es gibt einen Ultrafilter auf S, welcher kein Hauptfilter ist.