Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
Simon Müller
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Modelltheorie

Blatt 7

Abgabe: Bis **Freitag, 20. Juli 2018, 10:00 Uhr**, in den Briefkasten Nummer 16. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 7.1 (*3 Punkte*)

Sei $\mathcal{L} = \{<\}$ die Sprache der Ordnungen. Zeigen Sie mit Hilfe des Endlichkeitssatzes, dass es keine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen geben kann, deren Modelle genau die Wohlordnungen sind.

Definition: Eine total geordnete Menge $(A, <)$ heißt **Wohlordnung**, falls A keine unendlich lange strikt absteigende Kette von Elementen enthält.

Für die folgende Aufgabe benötigen Sie den *Satz von Łoś*:
Sei $\mathcal{A} = \prod_{s \in S} \mathcal{A}^{(s)}/\mathfrak{F}$ ein Ultraprodukt von $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}^{(s)}$. Sei ferner $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel und $a_i = (a_i^{(s)})_{s \in S} \in \prod_{s \in S} \mathcal{A}^{(s)}$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi(\underline{[a_1]}, \ldots, \underline{[a_n]}) \Leftrightarrow \{s : \mathcal{A}^{(s)} \models \varphi(\underline{a_1^{(s)}}, \ldots, \underline{a_n^{(s)}})\} \in \mathfrak{F}.$$

Aufgabe 7.2 (*5 Punkte*)

Sei G eine Gruppe, die Elemente beliebig hoher endlicher Ordnung besitzt. Im Folgenden fassen wir G als $\langle +, 0 \rangle$-Struktur $\mathcal{G}$ auf.

(1) Zeigen Sie mit Hilfe von Zorns Lemma, dass es einen Ultrafilter $\mathfrak{F}$ auf $\mathbb{N}$ gibt, welcher alle koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ enthält (d.h. alle Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit endlichem Komplement). Folgern Sie, dass dieser Ultrafilter keine endliche Menge enthält.

(2) Zeigen Sie mit Hilfe einer Ultrafilter-Konstruktion, dass eine Gruppe H existiert, so dass H unendlich viele Elemente unendlicher Ordnung besitzt, und $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ die gleiche Theorie haben.

Hinweis: Betrachten Sie ein geeignetes Element aus $\mathcal{G}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{F}$.

(3) Sei Σ die Theorie von $\mathcal{G}$. Zeigen Sie, ohne den Endlichkeitssatz zu verwenden, dass es keine $\langle +, 0 \rangle$-Formel $\varphi(x)$ geben kann, so dass für alle Modelle $\mathcal{M}$ von Σ und alle $a \in M$ gilt:

$$\mathcal{M} \models \varphi(x/\underline{a}) \text{ genau dann wenn die Ordnung von } a \text{ endlich ist.}$$