
Klausur zur Modelltheorie

Matrikelnummer:

Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichte Punktzahl					
Korrektor (Initialen)					
Maximalpunktzahl	8	8	8	8	32

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **4 Aufgaben**.
2. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln**, außer Schreibzeug und Papier.
4. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift!** Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
5. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
6. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
7. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
8. Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Matrikelnummer:

Seite 1 zu Aufgabe 1

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Aufgabe 1 (8 Punkte).

- (a) (2 Punkte) Formulieren Sie den *Satz von Łoś*.
- (b) (3 Punkte) Folgern Sie den Endlichkeitssatz aus dem Satz von Łoś und der Ultrafilter-Konstruktion aus der Vorlesung.
- (c) (3 Punkte) Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ -Aus so, dass Σ Modelle beliebig großer endlicher Kardinalität besitzt. Zeigen Sie, dass Σ auch ein unendliches Modell hat.

Sie dürfen alle sonstigen Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 1:

Matrikelnummer:

Seite 3 zu Aufgabe 1

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Matrikelnummer:

Seite 1 zu Aufgabe 2

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Aufgabe 2 (8 Punkte).

- (a) (2 Punkte) Definieren Sie den Begriff *elementare Substruktur* (setzen Sie den Begriff *Substruktur* als bekannt voraus!) und formulieren Sie den *Satz von Löwenheim-Skolem abwärts*.
- (b) (4 Punkte) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Löwenheim-Skolem aufwärts.
- (c) (2 Punkte) Sei \mathcal{L} eine abzählbare Sprache und \mathcal{M} eine unendliche \mathcal{L} -Struktur. Zeigen Sie, dass zu jeder Kardinalzahl $\kappa \geq \aleph_0$ eine \mathcal{L} -Struktur \mathcal{N} der Kardinalität κ existiert mit $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Sie dürfen alle sonstigen Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Matrikelnummer:

Seite 3 zu Aufgabe 2

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Matrikelnummer:

Seite 1 zu Aufgabe 3

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Aufgabe 3 (8 Punkte).

- (a) (2 Punkte) Formulieren Sie das *Separationslemma*.
- (b) (3 Punkte) Sei $\mathcal{L} = \{<\}$ und ϕ eine \mathcal{L} -Formel der Form $\exists x \forall y \psi$, wobei ψ quantorenfrei sei mit $\text{Fr}(\psi) \subseteq \{x, y\}$.
- (i) Zeigen Sie, dass aus $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models \phi$ bereits $\langle \mathbb{N}, < \rangle \models \phi$ folgt, wobei wir $<$ wie üblich interpretieren.
 - (ii) Gilt (i) auch, wenn ψ nicht quantorenfrei ist?
- (c) (3 Punkte) Sei \mathcal{L} eine Sprache und $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ -Aus. Zeigen Sie, dass eine Teilklasse $\text{Mod}(\Sigma)$ von $\text{Str}_{\mathcal{L}}$ genau dann endlich axiomatisierbar ist, wenn $\text{Str}_{\mathcal{L}} - \text{Mod}(\Sigma)$ axiomatisierbar ist.

Sie dürfen alle sonstigen Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 3:

Matrikelnummer:

Seite 3 zu Aufgabe 3

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Matrikelnummer:

Seite 1 zu Aufgabe 4

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Aufgabe 4 (8 Punkte).

- (a) (2 Punkte) Nennen Sie 4 Charakterisierungen für den Begriff der *Modellvollständigkeit* einer Menge $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ -Aus.
- (b) (3 Punkte)
- (i) Geben Sie (ohne Beweis) ein Beispiel für eine Theorie an, die vollständig ist, aber keine Quantorenelimination erlaubt.
 - (ii) Zeigen Sie, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen mit Endpunkten vollständig, aber nicht modellvollständig ist.
- (c) (3 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die Theorie der unendlichen Mengen in der Sprache ohne Konstanten, Relations- und Funktionszeichen
- (i) vollständig ist
 - (ii) modellvollständig ist
 - (iii) Quantorenelimination erlaubt.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 4:

Matrikelnummer:

Seite 3 zu Aufgabe 4

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

