Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

# Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

## Blatt 1

**Abgabe:** Bis Donnerstag, 2. November 2017, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

**Aufgabe 1.1** (*4 Punkte*)

(a) Sei $C$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C[X_1, \dots, X_n] \setminus C$. Zeigen Sie, dass ein $\overline{x} \in C^n$ mit $f(\overline{x}) = 0$ existiert.
(b) Sei nun $n \geq 2$. Folgt hieraus bereits, dass $f$ unendlich viele Nullstellen in $C^n$ besitzt?

**Aufgabe 1.2** (*4 Punkte*)

Finden Sie für die folgenden Varietäten $V_i \subseteq \mathbb{R}^2$ jeweils eine implizite Repräsentation, d.h. eine Darstellung der Form $V_i = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_n)$ mit $f_j \in \mathbb{R}[X, Y]$ für alle $1 \leq j \leq n$.
(a) $V_1 = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\}$
(b) $V_2 = \{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$
(c) $V_3 = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$
(d) $V_4 = \{(t^2, t^3 - t) : t \in \mathbb{R}\}$

**Aufgabe 1.3** (*4 Punkte*)

Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen keine Varietäten sind:
(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(b) $X = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(c) $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{C}^n$.

**Aufgabe 1.4** (*4 Punkte*)

Beweisen oder widerlegen Sie:
(a) Unendliche Vereinigungen von Varietäten sind Varietäten.
(b) Unendliche Schnitte von Varietäten sind Varietäten.
(c) Seien $U \subseteq V$ Varietäten. Dann ist auch $V \setminus U$ eine Varietät.
(d) Ist $K$ ein Körper und sind $U \subseteq K^n$ und $V \subseteq K^m$ Varietäten, so ist auch

$$U \times V := \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in K^{n+m} : (x_1, \dots, x_n) \in U, (y_1, \dots, y_m) \in V\}$$

eine Varietät.

**Zusatzaufgabe** (*0 Punkte*)

Besorgen Sie sich über die Homepage der Uni-Bibliothek das für Studierende kostenlose eBook *Ideals, Varieties, and Algorithms* von Cox, Little und O'Shea, an welchem sich die Vorlesung orientiert.
Suchen Sie hierzu im *lokalen Katalog* nach diesem Titel. Den Download finden Sie über den Link *Verlag* in der Zeile *Internetseite/Link*.