Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 10

Abgabe: Bis Donnerstag, 18. Januar, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 10.1 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und $I = \langle X^4Y - Z^6, X^2 - Y^3Z, X^3Z^2 - Y^3 \rangle \triangleleft K[X,Y,Z]$.

(a) Bestimmen Sie eine Gröbnerbasis G von I bezüglich der lex-Monomordnung und finden Sie eine Familie von Monomen, die den Raum der Restglieder modulo G aufspannt.

(b) Wiederholen Sie die vorherige Teilaufgabe mit grlex als Monomordnung. Was fällt ihnen auf?

Aufgabe 10.2 (*3 Punkte*)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\emptyset \neq V$ eine K-Varietät und $\varphi \in K[V]$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}_V(\varphi) = \emptyset$ genau dann wenn $\varphi \in K[V]^*$.
Gilt diese Aussage auch für beliebige unendliche Körper?

Aufgabe 10.3 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, $f \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ und $V \subseteq K^n$ die durch die Gleichung $X_n - f(X_1, \ldots, X_{n-1}) = 0$ beschriebene Varietät. Zeigen Sie, dass V und K^{n-1} als K-Varietäten isomorph zueinander sind.

Aufgabe 10.4 (*5 Punkte*)

Wir betrachten die Varietät $V = \mathcal{V}(Y^5 - X^2) \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) In dieser Teilaufgabe soll gezeigt werden, dass V und $\mathbb{R}$ als Varietäten nicht isomorph sind.
  (i) Zeigen Sie mit Hilfe von Gröbnerbasen-Algorithmen (Vgl. Kapitel 5, Abschnitt §3), dass jedes Element aus $\mathbb{R}[V]$ eine eindeutige Darstellung der Form $a(Y) + b(Y)X$ besitzt.
  (ii) Schreiben Sie $(a + bX)(a' + b'X) \in \mathbb{R}[V]$ in der Form aus (i)
  (iii) Führen Sie die Annahme, dass ein Ringisomorphismus $\varphi : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[V]$ existiert, zu einem Widerspruch.

  Hinweis: Da φ surjektiv ist, liegen die Restklassen von X und Y im Bild von φ.

(b) Zeigen Sie, dass $Y^5 - X^2$ irreduzibel in $\mathbb{R}[X,Y]$ ist, bestimmen Sie $\mathcal{I}(Y^5 - X^2)$ und folgern Sie, dass der Koordinatenring $\mathbb{R}[V]$ integer ist.

Zusatzaufgabe (*3 Punkte*)

Sei K ein Körper.

(a) Seien $d, n \geq 0$. Zeigen Sie, dass es in $K[X_1, \ldots, X_n]$ genau $\binom{n+d}{n}$ verschiedene Monome von Totalgrad $\leq d$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass für festes n die Anzahl dieser Monome genau so schnell wächst wie d^n für $d \to \infty$.