Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 11

Abgabe: Bis Donnerstag, 25. Januar, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 11.1 *(4 Punkte)*

(a) Sei K algebraisch abgeschlossen, I ein Radikalideal und $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ eine Gröbnerbasis von I, so dass $\mathrm{LT}(g_i) = X_i^{m_i}$ für alle i. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I)$ genau $\prod_i m_i$ viele Punkte enthält.

(b) Sei $V = \mathcal{V}(X_3 - X_1^2, X_4 - X_1X_2, X_2X_4 - X_1X_5, X_4^2 - X_3X_5) \subseteq \mathbb{C}^5$. Entscheiden Sie (mit Beweis), ob $\mathcal{V}(I)$ endlich ist.

Aufgabe 11.2 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper und $I \triangleleft K[X_1, \ldots, X_n]$ so, dass $K[X_1, \ldots, X_n]/I$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\dim(K[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{I}) \leq \dim(K[X_1, \ldots, X_n]/I)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I)$ höchstens $\dim(K[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{I})$ viele Elemente enthält.

(c) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass in (b) nicht immer Gleichheit gilt.

(d) Sei nun K algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass I genau dann ein Radikalideal ist, wenn die Dimension $\dim(K[X_1, \ldots, X_n]/I)$ gleich der Anzahl der Punkte von $\mathcal{V}(I)$ ist.

Aufgabe 11.3 *(4 Punkte)*

Ist V eine irreduzible Varietät und $f \in K(V)$, etwa $f = \varphi/\psi$, wobei $\varphi, \psi \in K[V]$, $\psi \neq 0$, so ist f auf $V \backslash \mathcal{V}_V(\psi)$ offensichtlich stets definiert, wobei $\mathcal{V}_V(\psi) := \{\overline{a} \in V : \psi(\overline{a}) = 0\}$.
In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass der Definitionsbereich von f diese Menge echt enthalten kann. Sei hierzu $V = \mathcal{V}(XZ - YW) \subseteq \mathbb{C}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle XZ - YW \rangle$ ein Primideal ist.

(b) Folgern Sie, dass V irreduzibel ist und $\mathcal{I}(V) = \langle XZ - YW \rangle$ gilt.

(c) Sei $f = [X]/[Y] \in \mathbb{C}(V)$, d.h. f ist auf $V \backslash \mathcal{V}_V([Y])$ definiert. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{V}_V([Y]) = \{(0, 0, z, w) : z, w \in \mathbb{C}\} \cup \{(x, 0, 0, w) : x, w \in \mathbb{C}\}.$$

(d) Beweisen Sie, dass $f = [W]/[Z]$ und folgern Sie, dass f außerhalb der Menge $\{(x, 0, 0, w) : x, w \in \mathbb{C}\}$ überall definiert ist.

Aufgabe 11.4 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper und V, W irreduzible K-Varietäten, so dass es einen Isomorphismus von $K(V)$ nach $K(W)$ gibt, der auf K konstant ist. Zeigen Sie, dass zueinander inverse rationale Abbildungen $\varphi : V \dashrightarrow W$ und $\psi : W \dashrightarrow V$ existieren.

Zusatzaufgabe *(5 Punkte)*

In Aufgabe 9.4 haben Sie gezeigt, dass es keine nicht-konstante polynomiale Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $V := \mathcal{V}(Y^2 - X^3 + X) \subseteq \mathbb{R}^2$ geben kann. Nun beweisen wir, dass $\mathbb{R}$ und V zudem nicht birational äquivalent zueinander sind.

(a) Angenommen es gäbe eine nicht-konstante rationale Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \dashrightarrow V$. Wir schreiben α in der Form $\alpha(t) = (a(t)/b(t), c(t)/d(t))$, wobei die Brüche jeweils gekürzt und b und d normiert seien. Zeigen Sie, dass $b^3 = d^2$ und $c^2 = a^3 - ab^2$.

(b) Folgern Sie, dass Polynome $A, B, C, D \in \mathbb{C}[t]$ existieren, so dass $a = A^2$, $b = B^2$, $a + b = C^2$ und $a - b = D^2$. Zeigen Sie ferner, dass A und B nicht-konstant und zueinander teilerfremd sind und dass $A^4 - B^4$ ebenfalls ein Quadrat in $\mathbb{C}[t]$ ist.

(c) Seien $A, B \in \mathbb{C}[t]$ wie in der vorherigen Teilaufgabe. Zeigen Sie, dass Polynome $A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{C}[t]$ existieren mit $A - B = A_1^2, A + B = B_1^2$ und $A^2 + B^2 = C_1^2$.

(d) Beweisen Sie, dass die Polynome A_1 und B_1 nicht-konstant und zueinander teilerfremd sind und

$$\max\{\deg(A_1), \deg(B_1)\} \leq \frac{1}{2} \max\{\deg(A), \deg(B)\}$$

gilt. Zeigen Sie ferner, dass $A_1^4 - (\sqrt{i}B_1)^4 = A_1^4 + B_1^4$ ein Quadrat in $\mathbb{C}[t]$ ist.

(e) Führen Sie schließlich die Annahme aus Teilaufgabe (a) zu einem Widerspruch, indem Sie zeigen, dass a, b, c und d konstant sein müssen.