Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 12

Abgabe: Bis Donnerstag, 1. Februar, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 12.1 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper, V eine irreduzible Varietät und $\varphi : K(V) \to \{\text{Rationale Abbildungen } V \dashrightarrow K\}$ die Funktion, welche ein Element $\overline{f}/\overline{g}$ aus $K(V) = \mathrm{Quot}(K[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(V))$ auf die durch f/g repräsentierte rationale Abbildung schickt.

(a) Versehen Sie den Zielbereich von φ mit einer geeigneten Addition und Multiplikation und weisen Sie deren Wohldefiniertheit nach.

(b) Zeigen Sie, dass φ ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist. Zeigen oder widerlegen Sie ferner, dass φ ein Ringisomorphismus ist.

Aufgabe 12.2 *(4 Punkte)*

(a) Sei $\varphi : V \dashrightarrow W$ eine rationale Abbildung und $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ Untervarietäten, so dass φ auf $V \backslash V'$ definiert ist. Zeigen Sie, dass

$$V'' = V' \cup \{p \in V \backslash V' : \varphi(p) \in W'\}$$

eine Untervarietät von V ist.

(b) Seien V und W via $\varphi : V \dashrightarrow W$ und $\psi : W \dashrightarrow V$ birational äquivalent und seien $V' \subseteq V$ (bezüglich $\varphi \circ \psi$) und $W' \subseteq W$ (bezüglich $\psi \circ \varphi$) wie im Beweis von Theorem 10 auf Seite 273 im Buch zur Vorlesung. Seien ferner

$$\mathcal{V} = \{p \in V \backslash V' : \varphi(p) \in W \backslash W'\}$$

und

$$\mathcal{W} = \{q \in W \backslash W' : \psi(q) \in V \backslash V'\}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ und $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ zueinander inverse Bijektionen sind.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $\mathcal{V} = V \backslash V_1$ und $\mathcal{W} = W \backslash W_1$ für gewisse echte Untervarietäten V_1 und W_1.

Aufgabe 12.3 *(4 Punkte)*

Betrachte die affine Varietät $W = \mathcal{V}(X_2 - X_1^2, X_3 - X_1^3) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Sei W durch (t, t^2, t^3) parametrisiert. Zeigen Sie, dass der Punkt $(1 : t : t^2 : t^3)$ für $t \mapsto \pm\infty$ den Punkt $(0 : 0 : 0 : 1)$ approximiert.

(b) Wir betrachten nun die projektive Varietät

$$V' = \mathcal{V}(X_2X_0 - X_1^2, X_3X_0^2 - X_1^3, X_1X_3 - X_2^2) \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass $V' \cap U_0 = W$ und $V' \cap H = \{(0 : 0 : 0 : 1)\}$ gilt, wobei U_0 und H wie in der Vorlesung definiert seien.

(c) Nun betrachten wir die projektive Varietät $V = \mathcal{V}(X_2X_0 - X_1^2, X_3X_0^2 - X_1^3) \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $V = V' \cup \mathcal{V}(X_0, X_1)$.

Definition Sei $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom von Grad 1. Dann nennen wir die durch f erzeugte projektive Varietät $\mathcal{V}(f)$ eine **Hyperebene**. Die Menge aller Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(K)$ heißt der **duale projektive Raum**, geschrieben $\mathbb{P}^n(K)^\vee$.

Aufgabe 12.4 *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass zwei homogene lineare Polynome $f, g \in K[X_0, \ldots, X_n]$ genau dann die gleiche Hyperebne in $\mathbb{P}^n(K)$ definieren, wenn ein $\lambda \in K\backslash\{0\}$ existiert mit $f = \lambda g$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{P}^n(K)^\vee \to (K^{n+1}\backslash\{0\})/\sim,\ a_0X_0 + \ldots + a_nX_n = 0 \mapsto (a_0, \ldots, a_n).$$

bijektiv ist, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation aus der Vorlesung bezeichnet.

(c) Bestimmen Sie die Elemente von $\mathbb{P}^n(K)^\vee$, die den Punkt $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$ enthalten.

Definition Seien V und W K-Varietäten. Eine polynomiale Abbildung $\varphi : V \to W$ ist ein **Isomorphismus**, falls φ bijektiv ist und eine polynomiale Abbildung $\psi : W \to V$ existiert mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

Zusatzaufgabe *(3 Punkte)*

(a) Sei K ein Körper, $V = K$ und $W = \mathcal{V}(X^3 - Y^2) \subseteq K^2$. Sei ferner $\varphi : V \to W$ gegeben durch $\varphi(x) = (x^2, x^3)$. Zeigen Sie, dass φ bijektiv, aber kein Isomorphismus ist. Ist φ^{-1} eine rationale Abbildung?

(b) Sei p eine Primzahl und K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie, dass $\varphi : K \to K$, gegeben durch $\varphi(x) = x^p$, bijektiv, aber kein Isomorphismus von Varietäten ist.

(c) Sei K ein beliebiger Körper, V und W affine K-Varietäten und $\varphi : V \to W$ eine polynomiale Abbildung. Zeigen Sie, dass φ bezüglich der Zariski-Topologie stetig ist.