Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 13

Abgabe: Bis Donnerstag, 8. Februar, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 13.1 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper.

(a) Seien $f, f_1, \ldots, f_s \in K[X_0, \ldots, X_n]$ homogene Polynome. Nach Anwendung des Divisionsalgorithmus sei $f = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r$. Zeigen Sie, dass $a_1, \ldots, a_s, r \in K[X_0, \ldots, X_n]$ ebenfalls homogene Polynome sind.
(b) Zeigen Sie, dass für homogene Polynome $f, g \in K[X_0, \ldots, X_n]$ auch das S-Polynom $S(f, g)$ homogen ist.
(c) Beweisen Sie, dass ein homogenes Ideal eine homogene Gröbnerbasis besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie den Buchberger-Algorithmus.

(d) Sei $I \lhd K[X_0, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  (i) $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ für gewisse homogene Polynome $f_1, \ldots, f_s \in K[X_0, \ldots, X_n]$.
  (ii) Eine reduzierte Gröbnerbasis von I (bezüglich einer beliebigen Monomordnung) besteht aus homogenen Polynomen.

Aufgabe 13.2 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper und $I_1, \ldots, I_l \lhd K[X_0, \ldots, X_n]$ homogene Ideale. Ferner bezeichne $\mathcal{V}(J)$ für ein homogenes Ideal $J \lhd K[X_0, \ldots, X_n]$ die zugehörige projektive Varietät.

(a) Zeigen Sie, dass $I_1 + \ldots + I_l$ und $I_1 \cap \ldots \cap I_l$ und $I_1 \cdots I_l$ wieder homogene Ideale sind.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I_1 + \ldots + I_l) = \cap_{i=1}^{l} V_i$.
(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I_1 \cap \ldots \cap I_l) = \mathcal{V}(I_1 \cdots I_l) = \bigcup_{i=1}^{l} V_i$.

Aufgabe 13.3 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass ein homogenes Ideal $I \lhd K[X_0, \ldots, X_n]$ genau dann prim ist, wenn für alle homogenen Polynome $f, g \in I$ gilt: $fg \in I \Rightarrow f \in I$ oder $g \in I$.
(b) Sei K nun algebraisch abgeschlossen und $I \lhd K[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass die projektive Varietät $\mathcal{V}(I)$ irreduzibel ist, falls I prim ist. Zeigen Sie ferner, dass die Umkehrung ebenfalls gilt, falls I ein Radikalideal ist.
(c) Sei K erneut algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{I}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den homogenen, in $\langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ enthaltenen Primidealen von $K[X_0, \ldots, X_n]$ und den nichtleeren, irreduziblen, projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(K)$ sind.

Aufgabe 13.4 *(4 Punkte)*

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I \lhd K[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I) = \emptyset$ in $\mathbb{P}^n(K)$ genau dann gilt, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Es existiert ein $r \geq 1$, so dass jedes homogenes Polynom von Totalgrad $\geq r$ in I enthalten ist.
(ii) Das Radikal von I ist enweder $\langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ oder $K[X_0, \ldots, X_n]$.

Bitte wenden

Zusatzaufgabe *(5 Punkte)*

Sei K ein Körper und $V \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ eine irreduzible Varietät. In dieser Aufgabe werden wir rationale Funktionen auf V einführen.

(a) Sei $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom. Erläutern Sie, warum f im Allgemeinen keine wohldefinierte Abbildung auf V liefert.

(b) Seien $f, g \in K[X_0, \ldots, X_n]$ homogene Polynome von Totalgrad $d \in \mathbb{N}$ und sei $g \notin \mathcal{I}(V)$ Zeigen Sie, dass $\varphi = f/g$ eine wohldefinierte Funktion auf der nichtleeren Menge $V \backslash (V \cap \mathcal{V}(g)) \subseteq V$ ist.

(c) Ist $\varphi = f/g$ und $\psi = h/l$, wobei alle diese Polynome homogen seien und f und g, sowie h und l den gleichen Totalgrad haben, so heißen φ und ψ äquivalent auf V, geschrieben $\varphi \sim \psi$, genau dann wenn es eine echte Untervarietät $W \subset V$ gibt, so dass φ und ψ auf W definiert sind und übereinstimmen. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

   Hinweis: Für den Beweis benötigen Sie die Irreduzibilität von V.

   Eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ heißt eine **rationale Funktion auf** V und $K(V)$ sei die Menge all dieser Äquivalenzklassen.

(d) Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation bezüglich dieser Äquivalenzklassen wohldefiniert sind und $K(V)$ zu einem Körper machen, dem sogenanten **Körper der rationalen Funktionen der projektiven Varietät** V.

(e) Sei U_i der affine Part von $\mathbb{P}^n(K)$ (Vergleiche Kapitel 8.2) und sei $V \cap U_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $K(V)$ isomorph zu dem Körper $K(V \cap U_i)$ der rationalen Funktionen auf der affinen Varität $V \cap U_i$ ist.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $V \cap U_i$ eine irreduzible affine Varietät in $U_i \cong K^n$ ist.