Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 2

Abgabe: Bis Donnerstag, 9. November 2017, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 2.1 *(3 Punkte)*

In der Vorlesung wurde $\mathcal{I}(V)$ nur für Varietäten $V \subseteq K^n$ definiert. Wir verallgemeinern diese Definition nun wie folgt: für eine beliebige Teilmenge $S \subseteq K^n$ sei

$$\mathcal{I}(S) := \{f \in K[X_1, \dots, X_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } (a_1, \dots, a_n) \in S\}.$$

(a) Sei $X := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{I}(X)$.
(b) Bestimmen Sie $\mathcal{I}(\mathbb{Z}^n)$ bezüglich $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Aufgabe 2.2 *(5 Punkte)*

Für einen kommutativen Ring A und ein Ideal $I \lhd A$ heißt $\sqrt{I} := \{x \in A : x^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ das **Radikal** von I. Das Ideal I heißt **Radikalideal**, falls $I = \sqrt{I}$.

(a) Beweisen Sie, dass $\sqrt{I}$ ein Ideal von A ist.
(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Rechenregeln:
  (i) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ (d.h. $\sqrt{I}$ ist ein Radikalideal)
  (ii) $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$
  (iii) $\sqrt{I} = A \Longleftrightarrow I = A$
  (iv) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$
(c) Sei K ein Körper und $I = \langle X^2, Y^2 \rangle \lhd K[X, Y]$. Zeigen Sie, dass $I \neq \mathcal{I}(V)$ für jede Varietät $V \subseteq K^2$.

Aufgabe 2.3 *(3 Punkte)*

Sei A ein kommutativer Ring, I ein Ideal von A und $f, g \in A$. Zeigen Sie, dass aus $f - g \in I$ bereits $f^m - g^m \in I$ für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt.

Aufgabe 2.4 *(5 Punkte)*

Für einen unendlichen Körper K gilt bekanntlich, dass nur das Nullpolynom auf ganz K^n verschwindet. In dieser Aufgabe betrachten wir

$$I := \{f \in \mathbb{F}_2[X, Y] : f(x, y) = 0 \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{F}_2^2\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass I ein Ideal ist und $\langle X^2 - X, Y^2 - Y \rangle \subseteq I$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass jedes $f \in \mathbb{F}_2[X, Y]$ in der Form

$$f = A(X^2 - X) + B(Y^2 - Y) + aXY + bX + cY + d$$

geschrieben werden kann, wobei $A, B \in \mathbb{F}_2[X, Y]$ und $a, b, c, d \in \mathbb{F}_2$.
Hinweis: Fassen Sie f zunächst als Polynom in $\mathbb{F}_2[X][Y]$ auf, d.h. schreiben Sie $f = \sum_i p_i(X)Y^i$. Teilen Sie nun jedes p_i mittels Polynomdivision durch $(X^2 - X)$, um eine Darstellung der Form $f = A(X^2 - X) + q_1(Y)X + q_2(Y)$ zu erhalten. Verfahren Sie anschließend analog mit q_1 und q_2.
(c) Zeigen Sie, dass $aXY + bX + cY + d \in I \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$.
(d) Folgern Sie aus (a), (b) und (c), dass $I = \langle X^2 - X, Y^2 - Y \rangle$.