Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 3

Abgabe: Bis Donnerstag, 16. November 2017, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 3.1 (*4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Dickson's Lemma

(2) Für jedes $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}_0^n$ existieren endlich viele Elemente $\alpha(1), \ldots, \alpha(s) \in A$, so dass für jedes $\alpha \in A$ ein i und ein $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ existieren mit $\alpha = \alpha(i) + \gamma$.

Aufgabe 3.2 (*4 Punkte*)

Für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $v \cdot w := \sum_i v_i w_i$ das Standardskalarprodukt von v und w. Sei nun $u \in \mathbb{R}^n$, so dass $u_1, \ldots, u_n$ positiv und linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Wir betrachten die Relation

$$\alpha >_u \beta :\Leftrightarrow u \cdot \alpha > u \cdot \beta.$$

(a) Beweisen Sie, dass $>_u$ eine Monomordnung definiert.

(b) Wo benötigt man, dass die u_i linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind?

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass es ein $u \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $u_1, \ldots, u_n$ positiv und linear abhängig über $\mathbb{Q}$ sind, und $>_u$ eine Monomordnung ist.

Aufgabe 3.3 (*4 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{N}_0$ genau eine Monomordnung gibt.

Sei nun $n \geq 2$ beliebig.

(b) Existiert eine Monomordnung $<$ auf $\mathbb{N}_0^n$, so dass zu je zwei Elementen $\alpha < \beta \in \mathbb{N}_0^n$ nur endlich viele Elemente $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ existieren mit $\alpha < \gamma < \beta$?

(c) Existiert eine Monomordnung $<$ auf $\mathbb{N}_0^n$ und zwei Elemente $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, so dass unendlich viele Elemente zwischen α und β liegen?

Aufgabe 3.4 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und $0 \neq f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\text{multideg}(fg) = \text{multideg}(f) + \text{multideg}(g)$.

(b) Sei nun $f + g \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\text{multideg}(f+g) \leq \max\{\text{multideg}(f), \text{multideg}(g)\}$, und das Gleichheit gilt für $deg(f) = deg(g)$.