Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 4

Abgabe: Bis Donnerstag, 23. November 2017, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 4.1 (*2 Punkte*)

Sei K ein Körper, $f = X^7Y^2 + X^3Y^2 - Y + 1 \in K[X,Y]$ und $F = (XY^2 - X, X - Y^3)$ eine geordnete Menge. Bestimmen sie das Restglied der Division von f durch F bezüglich lex als Monomordnung.

Aufgabe 4.2 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $I \lhd K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass, bezüglich einer festen Monomordnung, eine endliche Teilmenge $G = \{g_1, \ldots, g_t\} \subseteq I$ genau dann eine Gröbnerbasis von I ist, wenn der Leitterm jedes Elements aus I durch den Leitterm von einem der g_i geteilt wird.

(b) Sei $I \lhd K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Hauptideal. Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge von I, die einen Erzeuger von I enthält, bereits eine Gröbnerbasis von I ist.

Aufgabe 4.3 (*4 Punkte*)

Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in reduzierter Zeilenstufenform und $J \lhd \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ das von den linearen Polynomen $g_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$ erzeugte Ideal ($1 \leq i \leq m$). Zeigen Sie, dass $\{g_1, \ldots, g_m\}$ bezüglich einer geeigneten lexikographischen Monomordnung eine Gröbnerbasis von J ist.

Aufgabe 4.4 (*2 Punkte*)

Sei K ein Körper und $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\mathcal{V}(f_1, f_2, \ldots) = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_N).$$

Aufgabe 4.5 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und $I \lhd K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Ist $G = (g_1, \ldots, g_n) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ eine geordnete Menge und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, so schreiben wir $\overline{f}^G$ für das Restglied der Division von f durch G.

(a) Zeigen Sie, dass eine endliche Basis G von I, welche $\overline{f}^G = 0$ für alle $f \in I$ erfüllt, eine Gröbnerbasis von I ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls G und G' Gröbnerbasen von I bezüglich der selben Monomordnung sind, $\overline{f}^G = \overline{f}^{G'}$ für alle $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt.

(c) Sei G eine Gröbnerbasis von I. Zeigen Sie, dass die Rechenregeln

$$\overline{f+g}^G = \overline{f}^G + \overline{g}^G \text{ und } \overline{fg}^G = \overline{\overline{f}^G \cdot \overline{g}^G}^G$$

gelten.