Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 5

Abgabe: Bis Donnerstag, 30. November 2017, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 5.1 (*3 Punkte*)

Sei $I \triangleleft K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und G eine Gröbnerbasis von I bezüglich einer beliebigen Monomordnung, so dass $LC(g) = 1$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) G ist eine minimale Gröbnerbasis von I.
(2) Keine echte Teilmenge von G ist eine Gröbnerbasis von I.
(3) $\mathrm{LT}(G)$ ist die minimale Basis von $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$ (Vgl. Cox, Ch. II, §4, Proposition 7).

Aufgabe 5.2 (*4 Punkte*)

Sei $I \triangleleft K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und $G, \tilde{G}$ zwei minimale Gröbnerbasen von I bezüglich einer beliebigen Monomordnung $<$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{LT}(G) = \mathrm{LT}(\tilde{G})$ und $|G| = |\tilde{G}|$.
(b) Sei nun $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ mit $f_1 = X^3Y^2 - 1, f_2 = X^7 - Y$ und $f_3 = X^4 - Y^3 \in \mathbb{Q}[X, Y]$ mit $<=<_{\mathrm{lex}}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Buchberger Algorithmus eine Gröbnerbasis von I. Zeigen Sie ferner, dass I unendlich viele minimale Gröbnerbasen besitzt und bestimmen sie die reduzierte Gröbnerbasis.

Aufgabe 5.3 (*5 Punkte*)

Sei K ein Körper, $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{n \times m}$ und $f_i = \sum_j a_{ij}x_j \in K[X_1, \dots, X_m]$ das durch die i-te Zeile von A bestimmte lineare Polynom ($1 \leq i \leq n$). Wir setzen $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ und fixieren $<_{\mathrm{lex}}$ als Monomordnung. Sei nun B die Matrix, die entsteht, in dem man A auf reduzierte Zeilenstufenform bringt, und g_j das durch die j-te vom Nullvektor verschiedenen Zeile von B bestimmte lineare Polynom ($1 \leq j \leq t$ für ein $t \leq n$).

(a) Zeigen Sie, dass $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$.
(b) Beweisen Sie, dass $G := \{g_1, \dots, g_t\}$ eine Gröbnerbasis von I ist.
(c) Erklären Sie, warum G sogar die reduzierte Gröbnerbasis von I ist.

Aufgabe 5.4 (*4 Punkte*)

Sei $>$ eine Monomordnung auf $K[X_1, \dots, X_n]$ und sei $1 \leq l \leq n$. Wir sagen $>$ ist von l-Eliminationstyp, falls jedes Monom, welches eine der Variablen $x_1, \dots, x_l$ enthält, bezüglich $>$ größer ist als jedes Monom aus $K[X_{l+1}, \dots, X_n]$.

(a) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Eliminationstheorems: Ist $I \triangleleft K[X_{l+1}, \dots, X_n]$ ein Ideal und G eine Gröbnerbasis von I bezüglich einer Monomordnung von l-Eliminationstyp, dann ist $G \cap K[X_{l+1}, \dots, X_n]$ eine Gröbnerbasis des l-ten Eliminationsideals $I_l = I \cap K[X_{l+1}, \dots, X_n]$.
(b) Ein Beispiel: Sei $l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq n$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definiere

$$\alpha >_l \beta :\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{l} \alpha_i > \sum_{i=1}^{l} \beta_i \text{ oder } \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = \sum_{i=1}^{l} \beta_i \text{ und } \alpha >_{\mathrm{grevlex}} \beta.$$

Zeigen Sie, dass $>_l$ eine Monomordnung von l-Eliminationstyp ist.

Bitte wenden

Zusatzaufgabe (*5 Punkte*)

Führen Sie in der folgenden Aufgabe die (teils sehr aufwendigen) Rechnungen mit dem freierhältlichen Computeralgebrasystem SINGULAR aus. Weitere Informationen zu dieser Software erhalten Sie per E-Mail. Dokumentieren Sie in ihrer Abgabe alle mit Singular berechneten Zwischenergebnisse.

(a) Überprüfen Sie für die folgenden beiden Beispiele, ob $f \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ gilt:

   (i) $f = xy^3 - z^2 + y^5 - z^3$ und $f_1 = -x^3 + y, f_2 = x^2y - z$.

   (ii) $f = x^3z - 2y^2$ und $f_1 = xz - y, f_2 = xy + 2z^2, f_3 = y - z$.

(b) Seien $f, f_1, \dots, f_r \in K[X_1, \dots, X_n]$. Zeigen Sie, dass

$$f \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_n \rangle} \Leftrightarrow 1 \in \langle f_1, \dots, f_r, 1 - Yf \rangle,$$

wobei das linke Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]$ und das rechte Ideal in $K[X_1, \dots, X_n, Y]$ gebildet wird.

Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis von $\Rightarrow$ die Identität $1 = 1 - y^k f^k + y^k f^k$, wobei $k \in \mathbb{N}$ sei mit $f^k \in I$.

(c) Seien $f, f_1, \dots, f_n \in K[X_1, \dots, X_n]$. Beschreiben und erläutern Sie einen Algorithmus, um festzustellen, ob $f \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}$ gilt. Testen Sie mit ihrem Algorithmus, ob

   (i) $y^2 + x^4 + 1 \in \sqrt{\langle xy^2 + 2y^2, x^4 - 2x^2 + 1 \rangle}$

   (ii) $y - x^2 + 1 \in \sqrt{\langle xy^2 + 2y^2, x^4 - 2x^2 + 1 \rangle}$