Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 6

Abgabe: Bis Donnerstag, 7. Dezember 2017, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 6.1 *(4 Punkte)*

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Polynome $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 7X + 6$ und $X^4 + X^2 + 1$ einen gemeinsamen Faktor in $\mathbb{Q}[X]$ haben.

Sei f ein Polynom von Grad l und g ein Polynom von Grad m, wobei $l \neq 0$ oder $m \neq 0$ gelte.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^{lm}\mathrm{Res}(g, f, x)$.

(c) Seien nun $0 \neq \lambda, \mu \in K$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Res}(\lambda f, \mu g, x) = \lambda^m \mu^l \mathrm{Res}(f, g, x)$.

(d) Welche der Formeln aus (b) und (c) gilt auch für den Fall $l = m = 0$? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6.2 *(4 Punkte)*

(a) Sei $I \lhd \mathbb{C}[X, Y]$ ein Ideal, so dass $I_1 \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I_1) = \pi_1(V)$, wobei $V = \mathcal{V}(I)$ sei und π_1 die Projektion auf die Y-Achse bezeichne.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis Theorem 3 auf Seite 131 verwenden.

(b) Sei $I = \langle f, g\rangle \lhd \mathbb{C}[X, Y]$ ein Ideal, so dass $\mathrm{Res}(f, g, x) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I_1) = \pi_1(V)$, wobei V und π_1 wie in Teil (a) definiert seien.

Aufgabe 6.3 *(4 Punkte)*

Seien $f = c_0X^l + \ldots + c_l$ und $g = d_0X^m + \ldots + d_m \in K[X]$ mit $c_0, d_0 \neq 0$ und $l \geq m$.

(a) Sei $\tilde{f} = f - \frac{c_0}{d_0}X^{l-m}g$, so dass $\deg(\tilde{f}) \leq l - 1$. Zeigen Sie, dass im Fall $\deg(\tilde{f}) = l - 1$

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^m d_0 \mathrm{Res}(\tilde{f}, g, x).$$

(b) Sei $\tilde{f}$ wie im vorherigen Aufgabenteil, so dass $\tilde{f} \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^{m(l-\deg(\tilde{f}))} d_0^{l-\deg(\tilde{\mathrm{f}})} \mathrm{Res}(\tilde{f}, g, x).$$

Mittels Polynomdivision schreiben wir nun f in der Form $f = qg + r$, wobei $\deg(r) < \deg(g)$ oder $r = 0$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass im Fall $r \neq 0$

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^{m(l-\deg(r))} d_0^{l-\deg(r)} \mathrm{Res}(r, g, x).$$

(d) Wir ergänzen die Definition der Resultanten nun, in dem wir $\mathrm{Res}(0, g, x) := 0 =: \mathrm{Res}(f, 0, x)$ setzen. Erklären Sie, warum im Fall $r = 0$ die Formel aus (c) die Resultante $\mathrm{Res}(f, g, x)$ korrekt berechnet.

Aufgabe 6.4 *(4 Punkte)*

Seien $f, g \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{C}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass γ genau dann in der Form $\gamma = \alpha + \beta$ geschrieben werden kann, wobei $f(\alpha) = g(\beta) = 0$, wenn die Gleichung $f(x) = g(y - x) = 0$ eine Lösung besitzt mit $y = \gamma$.

(b) Zeigen Sie, dass γ genau dann eine Nullstelle von $\mathrm{Res}(f(x), g(y - x), x)$ ist, wenn $\gamma = \alpha + \beta$, wobei $f(\alpha) = g(\beta) = 0$.

(c) Konstruieren Sie ein Polynom $h \in \mathbb{Q}[X]$, welches $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ als Nullstelle besitzt. Welche Polynome entsprechen hierbei f und g?

(d) Konstruieren Sie entsprechend ein Polynom, dessen Nullstellen alle die Form $\alpha - \beta$ haben, wobei $f(\alpha) = g(\beta) = 0$.