Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 7

Abgabe: Bis Donnerstag, 14. Dezember 2017, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 7.1 (*5 Punkte*)

Sei $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ von Totalgrad $N \in \mathbb{N}$. Im Beweis des schwachen Hilbertschen Nullstellensatzes wurde f mit Hilfe eines Koordinatenwechsels in die Form

$$\tilde{f} = c(a_2, \dots, a_n)\tilde{X_1}^N + \text{ Terme in welchen } \tilde{X_1} \text{ von Grad } < N \text{ ist}$$

überführt. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $c(a_2, \dots, a_n)$ ein von Null verschiedenes Polynom in den Variablen $a_2, \dots, a_n$ ist.

(a) Wir schreiben $f = \sum_i^N h_i$, wobei h_i homogen von Grad i (d.h. alle Monome von h_i haben Totalgrad i) seien. Zeigen Sie, dass nach dem besagten Koeffizientenwechsel $h_N(1, a_2, \dots, a_n)$ der Koeffizient $c(a_2, \dots, a_n)$ von $\tilde{X_1}^N$ in $\tilde{f}$ ist.

(b) Sei $h(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom. Zeigen Sie, dass h genau dann das Nullpolynom in $K[X_1, \dots, X_n]$ ist, wenn $h(1, X_2, \dots, X_n)$ das Nullpolynom in $K[X_2, \dots, X_n]$ ist.

(c) Folgern Sie, dass $c(a_2, \dots, a_n)$ ein Polynom in den Variablen $a_2, \dots, a_n$ ist mit $c(a_2, \dots, a_n) \neq 0$.

Definition Für $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ bezeichne $f^h := Y^{\deg(f)} f\left(X_1/Y, \dots, X_n/Y\right) \in K[Y, X_1, \dots, X_n]$ die **Homogenisierung** von f. Bemerken Sie, dass alle Monome von f^h den gleichen Absolutgrad besitzen.

Aufgabe 7.2 (*5 Punkte*)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass Varietäten über nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern stets durch ein einziges Polynom definiert werden können.

(a) Sei K ein Körper und $g \in K[X]$. Zeigen Sie, dass g genau dann eine Nullstelle in K besitzt, wenn ein Tupel $(a, b) \in K^2 \backslash \{0\}$ existiert mit $g^h(a, b) = 0$.

Sei von nun an K nicht algebraisch abgeschlossen.

(b) Zeigen Sie induktiv, dass für jedes $l \in \mathbb{N}$ ein Polynom $f \in K[X_1, \dots, X_l]$ existiert mit $\mathcal{V}(f) = \{0\}$.

(c) Zeigen Sie, dass für jede Varietät $V \subseteq K^n$ ein $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ existiert mit $V = \mathcal{V}(f)$.

Aufgabe 7.3 (*2 Punkte*)

Sei K ein beliebiger Körper, $S := \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid \forall x \in K^n : f(x) \neq 0\}$, und $I \lhd K[X_1, \dots, X_n]$ so, dass $I \cap S = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.

Aufgabe 7.4 (*4 Punkte*)

Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und $I, J \lhd A$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $I^l \subseteq J$ für ein $l \in \mathbb{N}$, dann $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$

(b) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$

(c) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$

(d) $I = \sqrt{I} \Leftrightarrow \forall a \in A (a^2 \in I \Rightarrow a \in I)$