Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 8

Abgabe: Bis Donnerstag, 21. Dezember 2017, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Definition Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X. Das Tupel $(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**, falls

(1) $0, X \in \mathcal{T}$.
(2) Ist I eine beliebige Indexmenge mit $X_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$, so auch $\bigcup_{i\in I} X_i \in \mathcal{T}$.
(3) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $X_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \leq n$, so auch $\cap_{i\leq n} X_i \in \mathcal{T}$.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **offen**, falls $A \in \mathcal{T}$, und **abgeschlossen**, falls $X \backslash A \in \mathcal{T}$. Der **Abschluss** $\overline{A}$ einer Menge $A \in \mathcal{T}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. $(X, \mathcal{T})$ heißt **Hausdorff-Raum**, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ existieren mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Definition Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die durch $\mathcal{T}_Z := \{K^n \backslash \mathcal{V}(A) : A \subseteq K[X_1, \ldots, X_n] \text{ endlich}\}$ definierte Menge von Teilmengen von K^n heißt **Zariski-Topologie**.

Aufgabe 8.1 *(4 Punkte)*

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $S, T \in \mathcal{T}$.

(a) Sei $S \subseteq T$. Zeigen Sie, dass $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.
(b) Zeigen Sie, dass $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.
(c) Beweisen Sie nun, dass $\mathcal{T}_Z$ (siehe oben) tatsächlich ein topologischer Raum ist.
(d) Sei K ein unendlicher Körper und $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$, wobei $g \neq 0$. Zeigen Sie, dass aus $f \in \mathcal{I}(K^n \backslash \mathcal{V}(g))$ bereits $f = 0$ folgt.

Aufgabe 8.2 *(3 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(X^2 + Y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ nicht irreduzibel ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{C}^3$ irreduzibel ist.

Aufgabe 8.3 *(4 Punkte)*

(1) Sei K ein nicht algebraisch abgeschlossener Körper.
  (a) Sei $I \triangleleft K[X_1, \ldots, X_n]$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I)$ entweder leer ist oder genau ein Element enthält.
  (b) Geben Sie ein Beispiel für ein maximales Ideal $I \triangleleft K[X_1, \ldots, X_n]$ an, so dass $\mathcal{V}(I) = \emptyset$.
  (c) Zeigen Sie, dass $K[X_1, \ldots, X_n]$ ein maximales Ideal besitzt, welches nicht von der Gestalt $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n\rangle$ ist für $a_1, \ldots, a_n \in K$.
(2) Sei K nun ein algebraisch abgeschlossener Körper. Folgern Sie Hilberts schwachen Nullstellensatz aus der folgenden Aussage (Vgl. Buch, Seite 210, Theorem 11)

  Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist jedes maximale Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ von der Form $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n\rangle$ für gewisse $a_1, \ldots, a_n \in K$.

Aufgabe 8.4 *(5 Punkte)*

Seien $f_1, \ldots, f_n \in K[X_1]$, wobei $m := \deg(f_1) > 0$, und sei

$$I := \langle f_1(X_1), X_2 - f_2(X_1), \ldots, X_n - f_n(X_1)\rangle \triangleleft K[X_1, \ldots, X_n].$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ eindeutig in der Form $f = q + r$ mit $q \in I$ und $r \in K[X_1]$ geschrieben werden kann, so dass entweder $r = 0$ oder $\deg(r) < m$.
(b) Sei $f \in K[X_1]$. Folgern Sie aus (a), dass $f \in I$ genau dann wenn f in $K[X_1]$ von f_1 geteilt wird.
(c) Zeigen Sie, dass I genau dann prim ist, wenn $f_1 \in K[X_1]$ irreduzibel ist.
(d) Zeigen Sie, dass I genau dann ein Radikalideal ist, wenn $f_1 \in K[X_1]$ quadratfrei ist.
(e) Zeigen Sie, dass $\sqrt{I} = \langle (f_1)_{\mathrm{red}}\rangle + I$ (Vgl. Buch S.186, Definition 10).

Bitte wenden

Zusatzaufgabe *(2 Punkte)*

Sei K ein unendlicher Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{T}_Z$ die Zariski-Topologie bezüglich K^n. Zeigen oder widerlegen Sie, dass τ_Z ein Hausdorff-Raum ist.