Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Blatt 9

Abgabe: Bis Donnerstag, 11. Januar, 11:45 Uhr, in den Briefkasten Nummer 8. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie Ihre Blätter zusammen.

Aufgabe 9.1 (*4 Punkte*)

(a) Sei $I \triangleleft \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ein echtes Ideal. Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ gleich dem Schnitt aller maximalen Ideale ist, die I enthalten.
(b) Sei A ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass A genau dann ein Körper ist, wenn jedes Ideal $I \triangleleft A$ ein Radikalideal ist.

Aufgabe 9.2 (*4 Punkte*)

Berechnen Sie den Zariski-Abschluss der folgenden Mengen bezüglich den angegebenen Obermengen:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2, x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(c) $C = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 | m = n^2\} \subseteq \mathbb{C}^2$
(d) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | \exists n \in \mathbb{N} : (x, y) = \left(n, \left(\sqrt{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n\right), \|(x, y)\| < 50\right\} \subseteq \mathbb{C}^2$

Aufgabe 9.3 (*4 Punkte*)

Sei $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ und $f = \prod_i f_i^{\alpha_i}$ die Zerlegung von f in irreduzible Faktoren. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(f) = \cup_i \mathcal{V}(f_i)$ die Zerlegung von $\mathcal{V}(f)$ in irreduzible Komponenten ist und $\mathcal{I}(\mathcal{V}(f)) = \langle \prod_i f_i \rangle$ gilt.

Aufgabe 9.4 (*4 Punkte*)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass keine nichtkonstante polynomiale Abbildung von $V := \mathbb{R}$ nach $W := \mathcal{V}(Y^2 - X^3 + X) \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert. Sei also $\varphi(t) = (a(t), b(t))$ eine polynomiale Abbildung von V nach W, wobei $a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t]$.

(a) Zeigen Sie, dass $b(t)^2 = a(t)(a(t)^2 - 1)$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass $b^2 = ac^2$ für ein zu a teilerfremdes Polynom $c \in \mathbb{R}[t]$.
(c) Folgern Sie, dass a und b konstante Polynome sind.

Zusatzaufgabe (*3 Punkte*)

Sei C ein algebraisch abgeschlossener Körper und V eine irreduzible affine Varietät in der Ebene C^2. Zeigen Sie, dass genau einer der folgenden drei Fälle eintritt:

(1) V ist endlich.
(2) $V = C^2$.
(3) V ist eine Kurve in C^2, d.h. $V = \mathcal{V}(f)$ für ein $f \in C[X_1, X_2] \backslash C$.

Zusatzaufgabe (*2 Punkte*)

Sei K ein Körper, $I \triangleleft K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und G eine Gröbnerbasis von I. Zeigen Sie, dass Aussage (1) aus (2) folgt, und dass die beiden Aussagen äquivalent sind, falls K algebraisch abgeschlossen ist:

(1) $\mathcal{V}(I)$ ist endlich.
(2) Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert ein $g \in G \backslash \{0\}$, so dass das Leitmonom von g ein Monom in der Variable X_i ist.

Zusatzaufgabe *(3 Punkte)*

(a) Sei A ein faktorieller Ring, $s \in \mathbb{N}_0, p_1, \dots, p_s$ paarweise nicht-assoziierte irreduzible Elemente in A und $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Hauptideal $\langle p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s} \rangle$ genau dann ein Radikalideal ist, wenn $\alpha_i = 1$ für alle $1 \leq i \leq s$.

(b) Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ und $I := (f) \lhd K[X]$. Zeigen Sie:

(i) Ist f separabel, so ist I ein Radikalideal.

(ii) Ist K vollkommen und I ein Radikalideal, so ist f separabel.

(c) Finden Sie zu (ii) ein Gegenbeispiel, wenn der Körper K nicht vollkommen ist.

Hinweis: Betrachten Sie hierzu $K = \mathbb{F}_p(T)$. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass K nicht vollkommen ist.