



15. April 2011

Funktionalanalysis 1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Es sei $X := \{a, b, c, d\}$ mit paarweise verschiedenen Elementen a, b, c, d .

- (i) Gegeben sei $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass (X, \mathcal{T}) einen topologischen Raum definiert. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Mengen in X bezüglich \mathcal{T} . Wie sieht jeweils das Innere der Mengen $\{c\}$, $\{b, c\}$ und $\{a, b, c\}$ aus? Geben Sie jeweils alle Umgebungen der Punkte $b \in X$ und $c \in X$ an. Bestimmen Sie den Abschluss der Mengen $\{a\}$ und $\{a, b\}$ und untersuchen Sie diese Mengen auf Dichtheit in X .
- (ii) Geben Sie zwei Topologien $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ auf X sowie paarweise unterschiedliche Mengen $A, B, C, D \subset X$ mit folgenden Eigenschaften an:
- A ist offen bezüglich \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 , B ist abgeschlossen bezüglich \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 .
 - C ist abgeschlossen bezüglich \mathcal{T}_1 und offen bezüglich \mathcal{T}_2 .
 - D ist offen bezüglich \mathcal{T}_1 und abgeschlossen bezüglich \mathcal{T}_2 .

Aufgabe 1.2 Sei (X, \mathcal{T}) ein Hausdorff-Raum.

- (i) Zeigen Sie, dass $M := \{(x, x); x \in X\}$ als Menge im topologischen Produktraum $(X \times X, \mathcal{T}_{X \times X})$ (vgl. Definition 1.1. e)) abgeschlossen ist.
- (ii) Sei $f : X \rightarrow X$ stetig. Zeigen Sie: $N := \{x \in X; f(x) = x\}$ ist abgeschlossen in (X, \mathcal{T}) .

Aufgabe 1.3 Es sei X die Menge aller Geraden in der Ebene \mathbb{R}^2 , die nicht durch den Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ verlaufen. Eine Gerade $g = g_{\alpha, c} \in X$ mit $\alpha \in [0, 2\pi)$, $c > 0$ ist gegeben durch

$$g_{\alpha, c} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha = c\}.$$

Für zwei Geraden $g = g_{\alpha, c}$ und $h = h_{\beta, d}$ aus X sei

$$d(g, h) := \left((c - d)^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie, dass (X, d) einen metrischen Raum definiert.

HINWEIS: Finden Sie mit Hilfe passender Additionstheoreme zunächst eine geeignete Darstellung für d .