Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

20.04.2011

Funktionalanalysis
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Es sei X eine Menge, $\mathscr{U} \subset \mathcal{P}(X)$.

(*i*) Zeigen Sie, dass $\mathscr{U}$ genau dann Basis einer Topologie auf X ist, wenn $X = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$ ist und wenn es zu $V_1, V_2 \in \mathscr{U}$ und $x \in V_1 \cap V_2$ stets $U \in \mathscr{U}$ gibt mit $x \in U \subset V_1 \cap V_2$.

(*ii*) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und $\mathcal{S} := \{\bigcup_{i \in I} U_i;\ U_i \in \mathscr{U}, I \text{ bel. Indexmenge.}\}$. Zeigen Sie dass $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ genau dann gilt, wenn $\mathscr{U} \subset \mathcal{T}$ ist und wenn es zu $V \in \mathcal{T}$ und $x \in V$ stets ein $U \in \mathscr{U}$ gibt mit $x \in U \subset V$.

(*iii*) Es seien stets $a, b, c \in [0,1]$ und $B_\varepsilon(x)$ die offene Kugel um $x \in \mathbb{R}^2$ mit Radius ε bezüglich der euklidischen Metrik. Welche der Mengensysteme

$$\mathscr{U}_1 := \{\overline{B}_\varepsilon((a,b)^T);\ \varepsilon < \min\{a, b, 1-a, 1-b\}\} \quad \mathscr{U}_4 := \{[a, 1-a] \times [b, 1-b];\ a, b < \tfrac{1}{2}\}$$
$$\mathscr{U}_2 := \{\overline{B}_\varepsilon((a,b)^T);\ \varepsilon \leq \min\{a, b, 1-a, 1-b\}\} \quad \mathscr{U}_5 := \{[a, b] \times \{c\};\ 0 \leq b-a \leq c\}$$
$$\mathscr{U}_3 := \{[a,b]^2;\ a < b\} \quad \mathscr{U}_6 := \{[a, b] \times \{c\};\ c \leq b-a\}$$

sind Basis einer Topologie auf $X := [0,1]^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2

(*i*) Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Zeigen Sie, dass $f : X \to Y$ schon stetig ist, wenn die Urbilder von Subbasiselementen offen sind.

(*ii*) Sei I eine beliebige Indexmenge, $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})$ für $i \in I$ topologische Räume und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ der topologische Produktraum der $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})$. Zeigen Sie, dass $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn alle $f_i : X \to Y_i;\ f_i := \mathrm{pr}_i \circ f$ für $i \in I$ stetig sind.

Aufgabe 2.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Es existiert ein beschränkter metrischer Raum (X, d'), welcher homöomorph zu (X, d) ist.
Hinweis: Betrachten Sie $d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

Abgabetermin: Freitag 29. April 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.