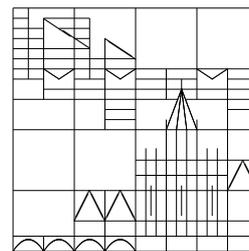


20.04.2011



## Funktionalanalysis 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Es sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{U}$  genau dann Basis einer Topologie auf  $X$  ist, wenn  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  ist und wenn es zu  $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$  und  $x \in V_1 \cap V_2$  stets  $U \in \mathcal{U}$  gibt mit  $x \in U \subset V_1 \cap V_2$ .
- (ii) Sei  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$  und  $\mathcal{S} := \{\bigcup_{i \in I} U_i; U_i \in \mathcal{U}, I \text{ bel. Indexmenge}\}$ . Zeigen Sie dass  $\mathcal{T} = \mathcal{S}$  genau dann gilt, wenn  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$  ist und wenn es zu  $V \in \mathcal{T}$  und  $x \in V$  stets ein  $U \in \mathcal{U}$  gibt mit  $x \in U \subset V$ .
- (iii) Es seien stets  $a, b, c \in [0, 1]$  und  $B_\varepsilon(x)$  die offene Kugel um  $x \in \mathbb{R}^2$  mit Radius  $\varepsilon$  bezüglich der euklidischen Metrik. Welche der Mengensysteme

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &:= \{\overline{B}_\varepsilon((a, b)^T); \varepsilon < \min\{a, b, 1 - a, 1 - b\}\} & \mathcal{U}_4 &:= \{[a, 1 - a] \times [b, 1 - b]; a, b < \frac{1}{2}\} \\ \mathcal{U}_2 &:= \{\overline{B}_\varepsilon((a, b)^T); \varepsilon \leq \min\{a, b, 1 - a, 1 - b\}\} & \mathcal{U}_5 &:= \{[a, b] \times \{c\}; 0 \leq b - a \leq c\} \\ \mathcal{U}_3 &:= \{[a, b]^2; a < b\} & \mathcal{U}_6 &:= \{[a, b] \times \{c\}; c \leq b - a\} \end{aligned}$$

sind Basis einer Topologie auf  $X := [0, 1]^2$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 2.2

- (i) Seien  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume. Zeigen Sie, dass  $f : X \rightarrow Y$  schon stetig ist, wenn die Urbilder von Subbasiselementen offen sind.
- (ii) Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge,  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})$  für  $i \in I$  topologische Räume und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  der topologische Produktraum der  $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})$ . Zeigen Sie, dass  $f : X \rightarrow Y$  genau dann stetig ist, wenn alle  $f_i : X \rightarrow Y_i; f_i := \text{pr}_i \circ f$  für  $i \in I$  stetig sind.

**Aufgabe 2.3** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Es existiert ein beschränkter metrischer Raum  $(X, d')$ , welcher homöomorph zu  $(X, d)$  ist.

HINWEIS: Betrachten Sie  $d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ .