Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

29.04.2011

Funktionalanalysis
3. Übungsblatt

Definition 3.1 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für Mengen $A, B \subset X$ sei*

$$d(A,B) := \inf\{d(x,y) : x \in A,\ y \in B\} \quad \textit{und} \quad D(A) := \operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

Aufgabe 3.1 Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$.

(i) Zeigen Sie: Ist A kompakt, B abgeschlossen und ist $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $d(A,B) > 0$.

(ii) Es sei $X := \mathbb{R}$. Finden Sie $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ und $d(A,B) = 0$.

Aufgabe 3.2 Sei (X,d) metrischer Raum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist (X,d) vollständig und $A \subset X$, dann ist der Unterraum (A,d) genau dann vollständig, wenn A in X abgeschlossen ist.

(ii) (X,d) ist genau dann vollständig, wenn es für alle absteigenden Folgen abgeschlossener, nicht-leerer Teilmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\lim_{n\to\infty} D(A_n) = 0$ genau ein $x \in X$ gibt mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$.

(iii) Konstruieren Sie in $(X,d) = (\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ eine absteigende Folge abgeschlossener, nicht-leerer Teilmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ mit $\lim_{n\to\infty} D(A_n) = 0$ so, dass kein $x \in \mathbb{Q}$ existiert mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$.

Aufgabe 3.3 Sei $B_\infty(\mathbb{R}) := \{f \in B(\mathbb{R});\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt } \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus K : |f(x)| \le \varepsilon\}$ der Unterraum der beschränkten Funktionen, die im Unendlichen verschwinden und $B_0(\mathbb{R})$ der Unterraum der beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger.

(i) Zeigen Sie, dass $(B_\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $(B_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum, aber kein Banachraum ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\overline{B_0(\mathbb{R})} = B_\infty(\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gilt.

Abgabetermin: Freitag 06. Mai 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.