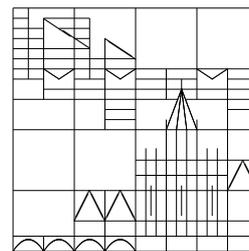


29.04.2011



Funktionalanalysis 3. Übungsblatt

Definition 3.1 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für Mengen $A, B \subset X$ sei

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \quad \text{und} \quad D(A) := \text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Aufgabe 3.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$.

- (i) Zeigen Sie: Ist A kompakt, B abgeschlossen und ist $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $d(A, B) > 0$.
- (ii) Es sei $X := \mathbb{R}$. Finden Sie $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ und $d(A, B) = 0$.

Aufgabe 3.2 Sei (X, d) metrischer Raum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Ist (X, d) vollständig und $A \subset X$, dann ist der Unterraum (A, d) genau dann vollständig, wenn A in X abgeschlossen ist.
- (ii) (X, d) ist genau dann vollständig, wenn es für alle absteigenden Folgen abgeschlossener, nicht-leerer Teilmengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} D(A_n) = 0$ genau ein $x \in X$ gibt mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$.
- (iii) Konstruieren Sie in $(X, d) = (\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ eine absteigende Folge abgeschlossener, nicht-leerer Teilmengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} D(A_n) = 0$ so, dass kein $x \in \mathbb{Q}$ existiert mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$.

Aufgabe 3.3 Sei $B_{\infty}(\mathbb{R}) := \{f \in B(\mathbb{R}); \forall \varepsilon > 0 \exists K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt } \forall x \in \mathbb{R} \setminus K : |f(x)| \leq \varepsilon\}$ der Unterraum der beschränkten Funktionen, die im Unendlichen verschwinden und $B_0(\mathbb{R})$ der Unterraum der beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger.

- (i) Zeigen Sie, dass $(B_{\infty}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ ein Banachraum ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass $(B_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ normierter Raum, aber kein Banachraum ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass $\overline{B_0(\mathbb{R})} = B_{\infty}(\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ gilt.