Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

06.05.2011

Funktionalanalysis
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Es sei X eine Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(i) Der Raum $\mathcal{F}(X, Y)$ aller Funktionen $f : X \to Y$ wird genau dann vermöge

$$\delta(f, g) := \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\}$$

zu einem metrischen Raum $(\mathcal{F}(X, Y), \delta)$ wenn X endlich oder (Y, d) beschränkt ist.

(ii) Ist (Y, d) beschränkt und vollständig, so ist $(\mathcal{F}(X, Y), \delta)$ ebenfalls vollständig.

(iii) Ist (Y, d) beschränkt und X topologischer Raum so definiert der Raum $C(X, Y)$ aller stetigen Funktionen $f : X \to Y$ einen abgeschlossenen Unterraum von $(\mathcal{F}(X, Y), \delta)$.

(iv) Ist (Y, d) in (iii) zusätzlich vollständig, so ist es auch $(C(X, Y), \delta)$.

Aufgabe 4.2 Sei $X := \mathcal{C}([0, 2])$ der Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen über dem Intervall $[0, 2]$. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < \infty$, nicht aber für $p = \infty$, durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 - 1/n, \\ nx + 1 - n, & 1 - 1/n \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|_p)$ definiert wird und geben Sie für $1 \leq p < \infty$ ihren Grenzwert in $(L^p([0, 2]), \|\cdot\|_p)$ an.

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie jeweils die Operatornormen der folgenden Operatoren:

(i) $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty), u \mapsto Au$ mit einer Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$,

(ii) $E : L^2(K) \to L^1(K), f \mapsto f$ mit kompakter Menge $K \subset \mathbb{R}^n$,

(iii) $S : \ell^1 \to \ell^2, x \mapsto x$,

(iv) $T : L^2([0, 3]) \to L^2([0, 3]), f \mapsto \left[x \mapsto \int_0^x f(\xi) d\xi\right]$.

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Wohldefiniertheit der Operatoren zu begründen.

Abgabetermin: Freitag 13. Mai 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.