Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

13.05.2011

Funktionalanalysis
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$.

(i) Zeigen Sie: Ist $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X) = (\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $M \subset X$ eine nicht-leere, abgeschlossene Menge und $z_0 \in X$, dann existiert ein $x \in M$ mit $\|x - z_0\| = \operatorname{dist}(z_0, M)$ (Vgl. Satz 2.29).

(ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine hermitesche, positiv-definite Matrix. Definiere das mit A assoziierte Skalarprodukt durch

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle .$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ ein Hilbertraum ist und geben Sie die Abbildung I_{Riesz} aus Satz 2.31 in Abhängigkeit von A an.

Aufgabe 5.2 Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit der Eigenschaft

(1) $$x \neq y, \ \|x\| = \|y\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \|(x+y)/2\| < 1.$$

Ist $M \subset X$ konvex und $z_0 \in X$, dann gilt $\|x - z_0\| = \operatorname{dist}(z_0, M)$ für höchstens ein $x \in M$. Geben Sie weiter einen Banachraum an, der Eigenschaft (1) nicht besitzt.

(ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit der Eigenschaft, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 1$ gilt

(2) $$\|(x+y)/2\| > 1 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

Ist $M \subset X$ nicht-leer, konvex und abgeschlossen und $z_0 \in X$, dann existiert genau ein $x \in M$ mit $\|x - z_0\| = \operatorname{dist}(z_0, M)$.

Aufgabe 5.3 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^1$ konvergiert in ℓ^1 genau dann gegen Null, wenn für jedes stetige, lineare Funktional $f \in (\ell^1)'$ schon $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ gilt.

Hinweis: Diese Aufgabe fordert vermutlich etwas Geduld: Führen Sie für die nicht-triviale Richtung einen indirekten Beweis. Konstruieren Sie dazu iterativ eine passende Folge $(v_i)_{i\in N} \subset \mathbb{C}$ mit $|v_i| = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie das Funktional $f_v(x) := \sum_{i=1}^{\infty} v_i x_i$.