Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

20.05.2011

Funktionalanalysis
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Es sei X ein normierter Raum und $T \in L(X)$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$c_T := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|_{L(X)}}$$

stets existiert. Sei nun X sogar Banachraum und $c_T < 1$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ in $L(X)$ konvergiert mit

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Aufgabe 6.2 Es seien X, Y Banachräume, $A \in L(X, Y)$ stetig invertierbar und $B \in L(X, Y)$ so, dass $\|B\|_{L(X,Y)} < \|A^{-1}\|_{L(Y,X)}^{-1}$ gilt.

(i) Verallgemeinern Sie Aussage und Beweis von Lemma 3.12 (aktuelles Skript) indem Sie zeigen, dass dann auch $A + B$ stetig invertierbar ist mit

$$\|(A + B)^{-1}\|_{L(Y,X)} \le \big(\|A^{-1}\|_{L(Y,X)}^{-1} - \|B\|_{L(X,Y)}\big)^{-1}. \tag{1}$$

Folgern Sie eine enstprechende Abschätzung für die Norm der Resolvente $R_\lambda(T)$ eines Operators $T \in L(X)$ für $|\lambda| > \|T\|_{L(X)}$.

(ii) Zeigen Sie den ersten Teil der Aussage in (i) indem Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz auf Invertierbarkeit von $A + B$ schließen und Abschätzung (1) „zu Fuß“ nachrechnen.

Anmerkung: Beachten Sie, dass in den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes für gewöhnlich ebenfalls die geometrische Reihe eingeht, sodass (ii) keine grundlegend neue Beweisvariante darstellt.

Aufgabe 6.3 Sei $X := C[0, 1]$, $\phi \in X$ und $T \in L(X)$ definiert durch

$$(Tf)(t) := \phi(t)f(t) \qquad (t \in [0, 1]).$$

Berechnen Sie $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma(T)$ und $\rho(T)$.
Hinweis: Betrachten Sie zur Bestimmung des Punktspektrums konstante Abschnitte von ϕ.

Abgabetermin: Freitag 27. Mai 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.