Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tobias Nau

27.05.2011

Funktionalanalysis
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 (**2P.**) Sei $X := C([0,1],\mathbb{C})$, $\phi \in X$ und $T \in L(X)$ wie in Aufgabe 6.3 definiert durch

$$(Tf)(t) := \phi(t)f(t) \qquad (t \in [0,1]).$$

Wiederholen Sie anhand dieses Beispiels die Begriffe Spektrum und Resolventenmenge und zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von T unendliche Vielfachheit haben.

Aufgabe 7.2 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $X := C([a,b],\mathbb{C})$. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi_k, \psi_k \in X$ für $k = 1, \dots, n$, wobei die φ_k in X linear unabhängig seien. Für welche $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gleichung

$$u(t) - \mu \int_a^b \sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\psi_k(s)u(s)ds = f(t) \qquad (t \in [a,b])$$

für alle $f \in X$ eine eindeutige Lösung $u \in X$?
Formulieren Sie ihr Ergebnis mit einem passenden Operator $A : X \to X$ mittels $\sigma(A)$ und $\rho(A)$.
Hinweis: Sie können die Aufgabe bearbeiten, indem Sie zunächst den Ansatz

$$u(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(t)$$

für die Lösung u rechtfertigen, der von μ-abhängigen Parametern $c_k \in \mathbb{C}$ für $k = 1, \dots, n$ abhängt. Leiten Sie anschließend mit diesem Ansatz ein LGS für die Parameter c_k her und lösen Sie es in Abhängigkeit von μ z.B. mit der Cramerschen Regel.

Abgabetermin: MITTWOCH 01. Juni 2011, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.